VARIÁVEIS COMPLEXAS

09/07/25 - AULA 19

Na aula passada iniciamos o estudo de integrais complexas curvilíneas. Encerramos a aula com o importante teorema:

TEOREMA: (T.F.C. para integrais curvilíneas)
Sejam $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma curva suave por partes e $F : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em Ω, tal que $\gamma \subset \Omega$. Então:

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Em particular, se γ for um caminho fechado, então

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = 0.$$

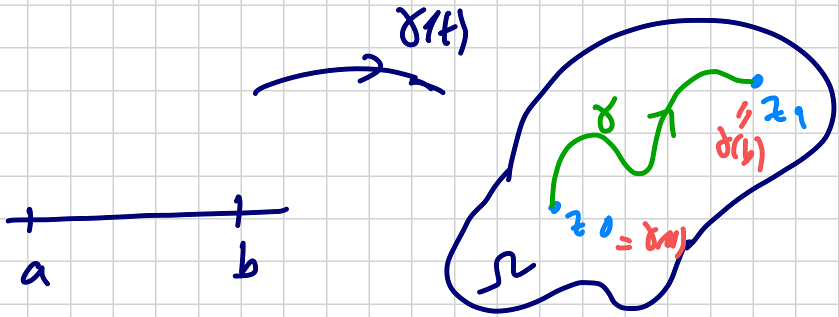
Uma consequência imediata desse teorema é o seguinte corolário:

COROLÁRIO: Sejam $f: \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em Ω e γ uma curva suave por partes de z_0 até z_1. Então,

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(z_1) - f(z_0)$$

DEMONSTR.: Seja $\gamma: [a,b] \to \Omega$ tal que

$$\gamma(a) = z_0 \quad \text{e} \quad \gamma(b) = z_1.$$



Então, pelo T.F.C anterior, segue que

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\underbrace{\gamma(b)}_{z_1}) - f(\underbrace{\gamma(a)}_{z_0}) = f(z_1) - f(z_0)$$

$\square$

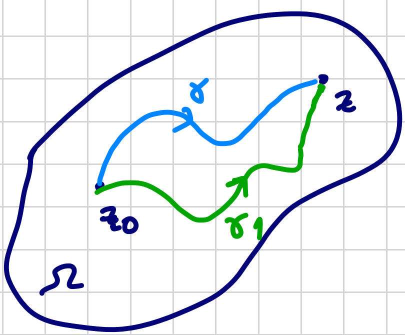
Obs.: Doravante vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região ou domínio de $\mathbb{C}$, ou seja, um conjunto aberto, não-vazio e conexo em $\mathbb{C}$.

Frente a isto, tem-se a seguinte definição.

Def.: Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função definida numa região Ω de $\mathbb{C}$. Dizemos que $\int_\gamma f(z)\,dz$ independe do caminho γ se, $\forall z_0 \in \Omega$ e para quaisquer parametrizações $\gamma : [a,b] \to \Omega$, com $\gamma(a) = z_0$ e $\gamma(b) = z$, $z \in \Omega$, então,

$$\int_\gamma f(z)\,dz \text{ depende só de } z_0 \text{ e de } z.$$

Ou seja, tal integral depende apenas dos pontos z_0 e z.



SE A INTEGRAL INDEPENDE DO CAMINHO, ENTÃO, c.f. ILUSTRAÇÃO AO LADO,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

Assim, dada $f: \Omega \to \mathbb{C}$ integrável e $z \in \Omega$, definimos $F: \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(z)\,dz \quad ,$$

calculada do ponto z_0 (inicial até um ponto z), e γ_z é um caminho de z_0 até z. (*)

<u>TEOREMA:</u> Seja $f: \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa na região Ω. Então, são equivalentes:

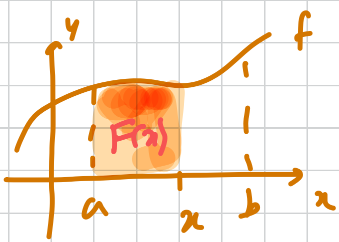
(i) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, para todo caminho fechado $\gamma \subset \Omega$.

(ii) a integral de f de um ponto z_0 até um ponto z independe do caminho.

(*) Lembre-se do CÁLCULO II: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável.

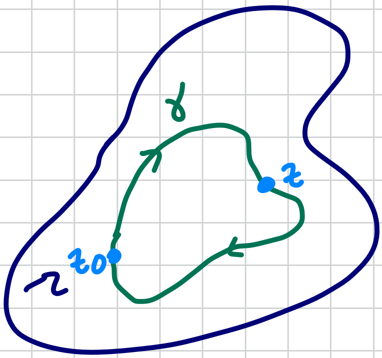
Define-se $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

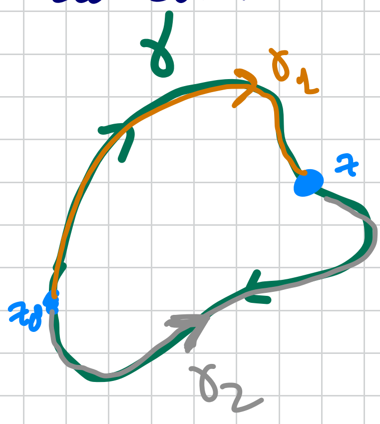


DEMONSTRAÇÃO:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Suponha que $\int_\gamma f(z).dz = 0$, onde $\gamma \subset \Omega$ é um caminho fechado, passando pelos pontos z_0 e z.



Este caminho fechado (qualquer) passando por z_0 e z, determina dois caminhos de z_0 até z: γ_1 e γ_2, (ambos de z_0 a z), sendo que γ_2 possui orientação contrária ao caminho original γ.



Então:

$$\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$$

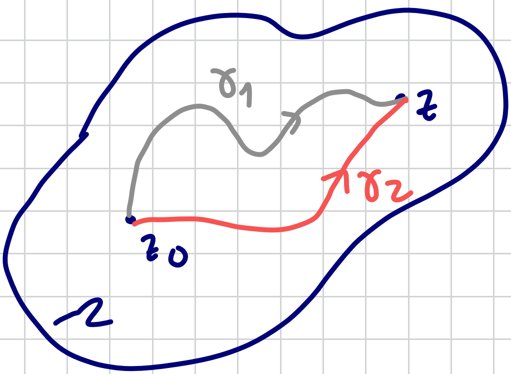
Pela hipótese, $\int_\gamma f(z)dz = 0$, i.e.;

$$0 = \int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz =$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$; ambos de z_0 até z. Isso prova (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponha que a integral $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\,dz$ de z_0 até z independe do caminho γ.



Sejam γ_1 e γ_2 dois caminhos quaisquer de z_0 até z. Então:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{-\gamma_2} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} f(z)dz = 0$$; onde $\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ é um caminho fechado

$\square$

TEOREMA DA PRIMITIVA. Sejam Ω uma região de $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. A integral de f independe do caminho em Ω se, e somente se, $\exists\ F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, tal que

$$F'(z) = f(z).$$

Neste caso, F chama-se uma **PRIMITIVA** de f em Ω.

DEMONSTR:

($\Leftarrow$) Suponha que $\exists\, F: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa,

com $F'(z) = f(z)$.

Então $F(z) = U(x,y) + i\, V(x,y)$

Como F é holomorfa, então:

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = f(z)$$

por hipótese.

Seja $\gamma : [a,b] \to \Omega$ um caminho qualquer.

$\gamma(t) = x(t) + i \cdot y(t)$

Assim

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \right) (dx + i\, dy)$$

$$= \int_\gamma \left(\frac{\partial U}{\partial x}\, dx - \frac{\partial V}{\partial x}\, dy \right) + i \cdot \int_\gamma \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial x}\, dx \right)$$

PROP. 1a'g 8 da aula passada.

$$= \int_\gamma \frac{\partial U}{\partial x}dx - \left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy + i\cdot\int_\gamma\left(\frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial x}dx\right)$$

EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

$$= \int_\gamma \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy\right)}_{dU} + i\cdot\int_\gamma \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial x}dx\right)}_{dV}$$

$$= \int_\gamma dU + i\cdot\int_\gamma dV =$$

$$= \int_a^b \left[\underline{\frac{\partial}{\partial x}(U(\gamma(t)).x'(t)} + \underline{\frac{\partial}{\partial y}(U(\gamma(t)).y'(t)}\right]dt +$$

$$+ i\cdot\int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial x}(V(\gamma(t)).x'(t) + \frac{\partial}{\partial y}(V(\gamma(t)).y'(t)\right]dt =$$

Lembre que; da regra da cadeia:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} = \underline{\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}} + \underline{\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}},$$

e o mesmo para $\frac{dV}{dt}$. Assim, tem-se:

$$\Leftrightarrow \int_a^b \frac{d}{dt}\left(U(\gamma(t))\right) dt + i \cdot \int_a^b \frac{d}{dt}\left(V(\gamma(t))\right) dt =$$

$$= U(\gamma(t))\Big|_a^b + i \cdot V(\gamma(t))\Big|_a^b =$$

$$= U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) + i \cdot \left[V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) \right]$$

$$= \underbrace{U(\gamma(b)) + i \cdot V(\gamma(b))}_{F(\gamma(b))} - \underbrace{\left[U(\gamma(a)) + i \cdot V(\gamma(a)) \right]}_{F(\gamma(a))}$$

$$= F(\underbrace{\gamma(b)}_{z_1}) - F(\underbrace{\gamma(a)}_{z_0}) \; ; \quad \forall \gamma \text{ - caminho em } \Omega.$$

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0) \; ; \quad \text{onde}$$

$$z_1 = \gamma(b) \quad e \quad z_0 = \gamma(a)$$

($\Longrightarrow$) Suponha que a integral de f independa do caminho.

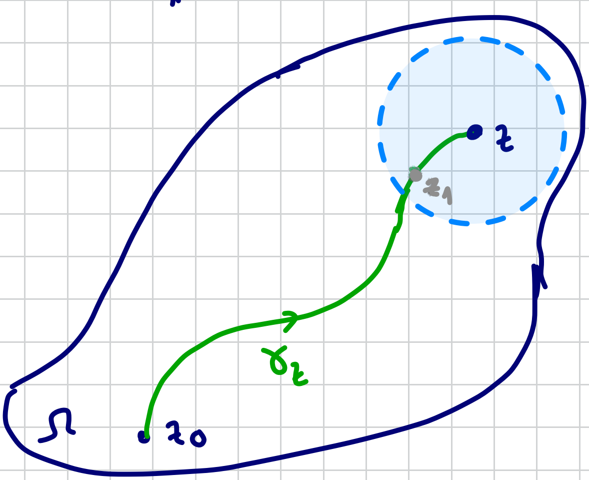
A mostrar: $\exists\ F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F' = f$.

Seja $F : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(z)\,dz ,$$

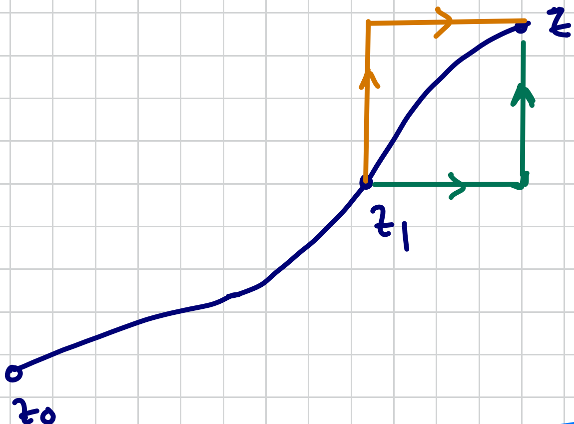
onde γ_z é um caminho qualquer de z_0 fixo até $z \in \Omega$.

Escreva $F = U + iV$ e $f = u + iv$



Tome um disco aberto centrado em z e escolha z_1 nesse disco, sobre γ_z.

Como, por hipótese, a integral independe do caminho, sejam os caminhos alternativos de z_1 a z dados conforme o esquema:



$z = x + i \cdot y$

$z_1 = x_1 + i \cdot y_1$

(FIXOS)

Assim;

da aula passada.

$$\int_{\gamma_z} f(z)dz = \underbrace{\int_{\gamma_z} u\,dx - v\,dy}_{U(x,y)} + i \cdot \underbrace{\int_{\gamma_z} v\,dx + u\,dy}_{V(x,y)} =$$

Analisando $U(x,y)$:

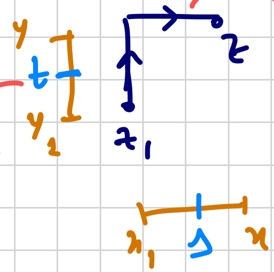
$$U(x,y) = \int_{\gamma_z} u\,dx - v\,dy =$$

$$= \int_{z_0}^{z_1} u\,dx - v\,dy + \int_{z_1}^{z} u\,dx - v\,dy$$

Considerando o caminho alternativo superior:

$$U(x,y) = \int_{z_0}^{z_1} u\,dx - v\,dy + \int u\,dx - v\,dy =$$

neste pedaço horizontal, y é const. logo, dy=0



x é const. e então dx=0

$$= \underbrace{\int_{z_0}^{z_1} u\,dx - v\,dy}_{\text{const.}} + \underbrace{\int_{y_1}^{y} 0 - v(x_1,t)\,dt}_{\text{const. p/ } x} + \underbrace{\int_{x_1}^{x} u(s,y)\,ds}_{\text{FUNÇÃO DE } x}$$

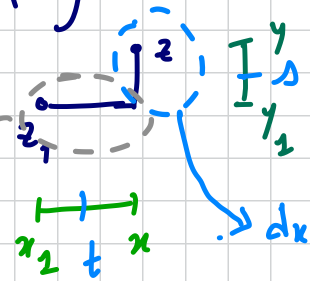
Derivando em x, temos:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 + 0 + \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{x} u(s,y)\,ds = u(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial x} = u(x,y)} \qquad (I)$$

Considerando agora o caminho alternativo inferior, temos:

$$U(x,y) = \int_{z_0}^{z_1} u\,dx - v\,dy + \int u\,dx - v\,dy =$$



$dy = 0$ (pois y fica constante)

$dx = 0$, pois na vertical, x fica constante

$$= \int_{z_0}^{z_1} u\,dx - v\,dy + \int_{x_1}^{x} u(t,y_1)\,dt - 0 + \int_{y_1}^{y} 0 - v(x,s)\,ds$$

$$= \int_{z_0}^{z_1} u\,dx - v\,dy + \int_{x_1}^{x} u(t,y_1)\,dt + \int_{y_1}^{y} -v(x,s)\,ds$$

Derivando em y, vem:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{\int_{z_0}^{z_1} u\,dx - v\,dy}_{\text{CONST.}} + \underbrace{\int_{x_1}^{x} u(t,y_1)\,dt}_{\text{CONST. P/ } y \text{ (VAR. } x)} - \underbrace{\int_{y_1}^{y} v(x,s)\,ds}_{\text{DEPENDENTE}}\Big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\int_{y_1}^{y} v(x,s)\,ds\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{y_1}^{y} v(x,s)\,ds\right) = -v(x,y)$$

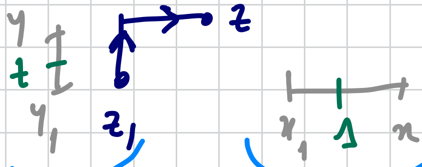
$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial y} = -v(x,y)} \qquad (\text{II})$$

Procedendo analogamente para

$V(x,y) = \int_{\gamma_2} v\,dx + u\,dy$, vamos obter:

- pelo caminho alternativo superior:

$$V(x,y) = \int_{z_0}^{z_1} v\,dx + u\,dy + \int v\,dx + u\,dy =$$



$dx = 0$ ($x = $ const.)

$dy = 0$ ($y = $ const)

$$= \int_{z_0}^{z_1} v\,dx + u\,dy + \int_{y_1}^{y} u(x_1,t)\,dt + \int_{x_2}^{x} v(s,y)\,ds\ ;$$

e então, derivando em x, vem:

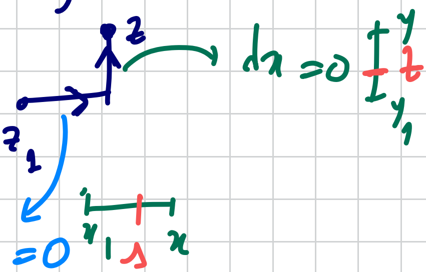
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\int_{z_0}^{z_1} v\,dx + u\,dy}_{\text{CONST.}} + \underbrace{\int_{y_1}^{y} u(x_2, t)\,dt}_{\text{CONSTANTE PARA } x} + \underbrace{\int_{x_1}^{x} v(s, y)\,ds}_{\text{DEPENDE DE } x} \right)$$

$$= 0 + 0 + \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{x} v(s,y)\,ds = v(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial V}{\partial x} = v(x,y)} \qquad \text{(III)}$$

Por fim, pelo caminho alternativo inferior, vem:

- $V(x,y) = \int_{z_0}^{z_1} v\,dx + u\,dy + \int v\,dx + u\,dy =$



$$= \int_{z_0}^{z_1} v\,dx + u\,dy + \int_{x_1}^{x} v(s, y_1)\,ds + \int_{y_1}^{y} u(x,t)\,dt \quad ;$$

e derivando em y, vem:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{\int_{z_0}^{z_1} v\,dx + u\,dy}_{\text{CONST.}} + \underbrace{\int_{x_1}^{x} v(s, y_1)\,ds}_{\text{CONST. P/ } y} + \underbrace{\int_{y_1}^{y} u(x,t)\,dt}_{\text{DEPENDE DE } y} \Big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int_{y_1}^{y} u(x,t)\,dt \Big) = u(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial V}{\partial y} = u(x,y)} \qquad (\mathrm{IV})$$

De (I), (II), (III) e (IV), vem:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -v(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = u(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y} \; ;$$

ou seja, valem as eq. de Cauchy - Riemann;
mostrando assim que $F(x,y) = U(x,y) + i \cdot V(x,y)$
é holomorfa.

Além disso;

$$F'(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = u(x,y) + i \cdot v(x,y) = f(x,y)$$

$\square$