

Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 09 de Exercícios - Integração em \mathbb{C}

1. Descreva a curva $z(t) = a \cos t + ib \sin t$, $-\pi \leq t \leq \pi$, onde $a, b > 0$.
2. Mostre que a curva γ parametrizada por

$$z(t) = \begin{cases} t(\cos \frac{1}{t} + i \sin \frac{1}{t}), & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

não é retificável.

3. Calcule o comprimento da curva $z(t) = 3e^{2it} + 2$ em $[-\pi, \pi]$.
4. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_{\gamma} y dz$, onde γ é a linha que une 0 ao i e i ao $2 + i$.

(b) $\int_{\gamma} z e^{z^2} dz$, onde γ é o círculo unitário.

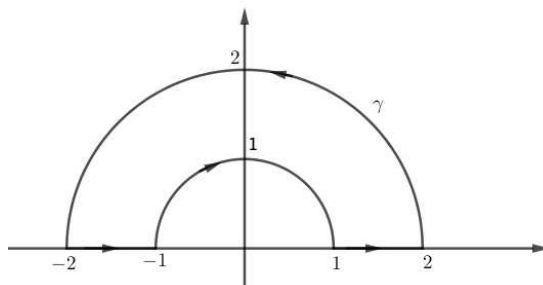
(c) $\int_{\gamma} (z^2 + 2z + 3) dz$, onde γ é a linha que une 1 ao $2 + i$.

(d) $\int_{\gamma} z^n dz$, onde γ é a poligonal com vértices em $-i$, $2i$ e $1 + i$.

(e) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-1}$, onde γ é o círculo de raio 2 e centro em 1, virando uma vez em volta do seu centro com direção anti-horária.

(f) $\int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$, onde γ é o semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$.

5. Calcule $\int_{\gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz$, onde γ é o caminho dado abaixo:



6. Calcule $\int_{\gamma} z|z| dz$ ao longo da semicircunferência superior $|z| = R$ de R a $-R$, e do segmento de linha $[-R, R]$.

7. Mostre que todas as integrais $\int_{\gamma} f(z)dz$ a seguir são nulas, justificando.

- (a) $f(z) = \frac{z+1}{z-3}$ e γ o círculo $|z| = 2$. (c) $f(z) = \frac{3ze^z}{z^2+3}$ e γ o círculo $|z| = \frac{5}{4}$.
(b) $f(z) = \frac{3z^2}{z+2i}$ e γ o círculo $|z| = \frac{3}{2}$.

8. Calcule $\int_{\gamma} \bar{z}dz$ sendo:

- (a) γ o caminho dado pela linha que liga 0 a $1+i$.
(b) γ o caminho que liga 0 a 1 e de 1 a $1+i$.

Se observarmos os resultados dos item (a) e (b) acima são diferentes, ou seja, a integral dada não independe do caminho. Você sabe explicar por quê?

9. Mostre que:

$$(a) \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (b) \int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|} = 0 \quad (c) \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z} = 0 \quad (d) \int_{|z|=1} \left| \frac{dz}{z} \right| = 2\pi$$

10. Sem calcular as integrais seguintes, mostre as desigualdades

$$\left| \int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz \right| \leq 3, \text{ e } \left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \right| \leq 1,$$

onde γ é o segmento de 1 a $1+i$.

11. Calcule $\int_{\gamma} \frac{(3z-1)dz}{z^2-3z-4}$, sendo γ a circunferência $|z| = 2$.

12. Seja γ o arco do círculo $|z| = 2$ que se situa no primeiro quadrante. Mostre que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{3},$$

sem calcular o valor da integral. (Sugestão: Use $|v+w| \geq |v| - |w|$.)

13. Seja $z_0 = re^{i\theta_0}$ e γ o caminho $\gamma(\theta) = re^{i\theta}$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$. Mostre que

$$\int_{\gamma} z^a dz = \frac{z_0^{a+1}}{a+1} [e^{(a+1)2\pi i} - 1].$$

14. Mostre que $\int_{\gamma} \log z dz = 2\pi i$, onde γ é um caminho fechado envolvendo a origem uma vez no sentido positivo.

15. Seja $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ a função multiforme dada por

$$f(z) = \text{Log } z.$$

(a) Redefina f de modo a ser holomorfa, verificando sua holomorficidade. Mostre também que sua primitiva é dada por $F(z) = z \log z - z$.

(b) Calcule $\int_{|z|=2} \log z dz$.