Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 12 de Exercícios - Séries de Taylor

1. Encontre a expansão em série de Taylor de cada função abaixo no ponto indicado. Determine também o seu raio de convergência.

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = 1+i$ (b) $f(z) = \dfrac{4}{z^2+2z}$, $z_0 = 1$

   (c) $f(z) = ze^{3z^2}$, $z_0 = 0$ (c) $f(z) = z \operatorname{senh} z^2$, $z_0 = 0$.

2. Encontre a série de Maclaurin de $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(2-z)}$ de duas formas diferentes, como indicado:

   (a) Decomponha $f(z)$ em frações parciais e use a expansão em séries geométricas para expandir cada aditivo da decomposição.

   (b) Encontre as séries para $\frac{1}{1-z}$ e $\frac{1}{2-z}$ e efetue o produto das mesmas.

   (c) Verifique que ambas as respostas dos itens (a) e (b) coincidem, e obtenha o raio de convergência da série para $f(z)$.

3. Encontre a série de Maclaurin para $f(z) = \dfrac{1}{1+z+z^2}$ e determine o seu raio de convergência.

4. Determine a expansão em série de Taylor de $f(z) = \log(1+z)$ em $z = 0$. Qual o seu raio de convergência?

5. Obtenha a série de Maclaurin para $f(z) = (1-z)^{1+i}$. Qual o seu raio de convergência?

6. Mostre que os coeficientes c_n do desenvolvimento

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

   verificam a relação $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ $(n \geq 2)$. Obtenha c_n e o raio de convergência dessa série[1].

7. Determine a expansão em série de Maclaurin para $f(z) = \operatorname{arcsen} z$, no ramo onde $f(0) = 0$ da seguinte forma:

   (a) Expanda a série de Maclaurin de $f'(z)$.

   (b) Integre o resultado acima de 0 até z para obter $f(z)$.

   (c) Qual o raio de convergência da série encontrada?

[1] Os números c_n são chamados de *números de Fibonacci*.

8. Represente em série de potências no $D_R(0)$ a função $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{\operatorname{sen}\zeta}{\zeta} d\zeta$.

9. Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$, onde γ é o disco unitário centrado na origem e f é dada por

   (a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2}$ (b) $f(z) = \dfrac{\cosh z - 1}{z^4}$

10. Obtenha a série de Maclaurin para $f(z) = \dfrac{z}{\cos z}$. Qual o seu raio de convergência?

11. Seja $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Mostre que $f''(z) = f(z)$.

12. Seja $f(z) = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} - \dfrac{z^7}{7} + ...$ Mostre que $f'(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$.