Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 11 de Exercícios - Sequências e séries de funções.

1. Suponha que a sequência de funções (f_n) convirja uniformemente para f e que a sequência de funções (g_n) convirja uniformemente para g em Ω.

   (a) Mostre que $(f_n + g_n)$ converge uniformemente para $f + g$ em Ω.

   (b) Se, $|f_n| \leq M$ e $|g_n| \leq M$ para todo $z \in \Omega$ e para todo n, mostre que $(f_n g_n)$ converge uniformemente para fg em Ω.

2. Mostre que a sequência $f_n(z) = \dfrac{z}{n^2}$ converge uniformemente para $f \equiv 0$ em $|z| \leq R$, $\forall R > 0$, mas que não converge uniformemente em todo o plano complexo.

3. Mostre que $f_n(z) = \dfrac{z^n}{n}$ converge uniformemente para $|z| < 1$. Mostre também que f'_n não converge uniformemente em $|z| < 1$, mas converge uniformemente em $|z| \leq r$, para $r < 1$.

4. Mostre que a sequência de funções $f_n(z) = \dfrac{z^3}{n^2 + z^2}$ é uniformemente convergente em $|z| < 1$.

5. Encontre a região onde a sequência (f_n) dada por $f_n(z) = \dfrac{e^{nz}}{n}$ converge pontualmente e onde converge uniformemente.

6. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ é uniformemente convergente no disco fechado $|z| \leq 1$ e divergente fora desse disco.

7. Estabeleça a convergência uniforme de cada série:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^2}$, $-\infty < x < \infty$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $|z| \leq 1$

8. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge uniformemente em $|z| < 1$. Conclua que sua soma é $\dfrac{1}{1-z}$. Em seguida, derivando e integrando esta série, mostre que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad \text{e} \quad \log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

   onde tomamos o ramo do logaritmo onde $\log 1 = 0$.

9. Use o Teste M de Weierstrass para mostrar que as séries a seguir convergem uniformemente:

   (a) $\displaystyle\sum_{n-=1}^{\infty} \frac{n \cos 3n}{1+5n} z^n$ nos discos $|z| \leq r < 1$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1} (z-1)^n$ nos discos $|z-1| \leq r < 1$.

10. A *função zeta de Riemann* é definida por[1] $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ (ramo principal de n^z)

    (a) Seja $\delta > 1$ um número real positivo. Mostre que a série converge uniformemente em todo semiplano $H_\delta = \{z : \mathfrak{Re}(z) \geq \delta > 1\}$.

    (b) Conclua que $\zeta(z)$ é holomorfa no semi-plano $H = \{z : \mathfrak{Re}(z) > 1\}$.

    (c) O que é $\zeta'(z)$?

11. Prove que se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(z)|$ é uniformemente convergente em um conjunto Ω e se $|f_n(z)| \leq |g_n(z)|, \forall z \in \Omega$ e para todo n suficientemente grande, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ é uniformemente convergente em Ω.

12. Calcule $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n+1}\right)'$ em $|z| < 1$.

13. Seja $(a_n) \subset \mathbb{C}$ uma sequência complexa tal que $|a_n| < \dfrac{M}{R^n}$, onde $M > 0$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots; R > 0$. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é convergente e determine o seu raio de convergência.

14. Calcule o raio de convergência e o disco de convergência de cada série:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} (z-1-i)^n$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{n!} (z-1)^{2n}$

15. Suponha que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ possui raio de convergência R, $0 < R < \infty$. Encontre os raios de convergência das séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^k$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$.

[1] Riemann usou a função zeta para estudar a distribuição dos números primos. Embora essa função fosse anteriormente conhecida por Euler, Riemann foi o primeiro a considerá-la em $\mathbb{C}$. Uma importante conjectura proposta por Riemann foi a chamada **Hipótese de Riemann**, que estabelece que o *prolongamento analítico* da função zeta possui infinitas raízes complexas ao longo da linha $\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}$.