

FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS

23/07/25 - AULA 12

EXERCÍCIO: Esboçar o gráfico de $y = 2 - \csc(2x - \frac{\pi}{6})$, indicando domínio, imagem e período.

SOLUÇÃO: Primeiramente, considere a função

$$y = 2 - \sin\left(\underbrace{2x - \frac{\pi}{6}}_t\right)$$

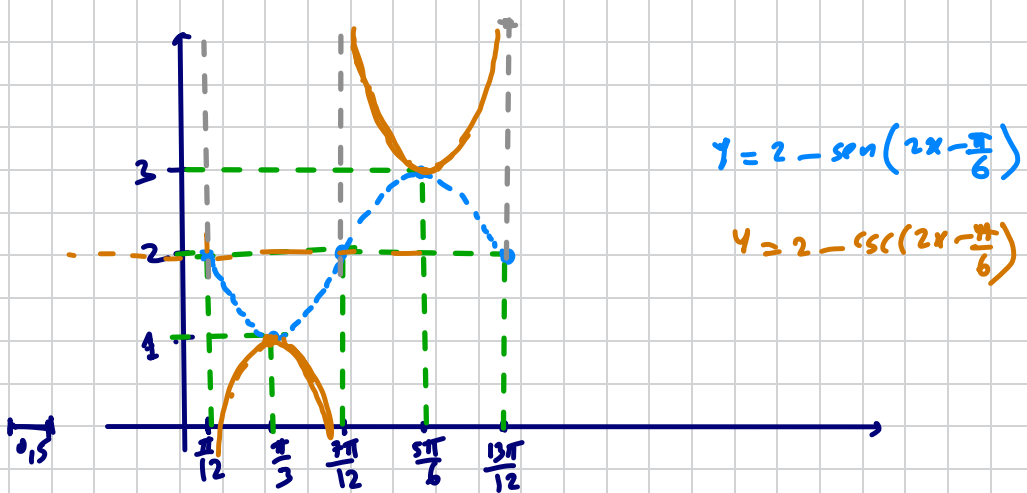
$$2x - \frac{\pi}{6} = t \Rightarrow 2x = t + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{12}}$$

A seguir, temos:



t	$y = 2 - \sin t$	$x = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{12}$
0	$2 - 0 = 2$	$\frac{\pi}{12}$
$\frac{\pi}{2}$	$2 - \sin \frac{\pi}{2} = 2 - 1 = 1$	$\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$
π	$2 - \sin \pi = 2 - 0 = 2$	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$
$\frac{3\pi}{2}$	$2 - \sin \frac{3\pi}{2} = 2 - (-1) = 3$	$\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$
2π	$2 - \sin 2\pi = 2 - 0 = 2$	$\frac{12\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$



$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi + \frac{\pi}{12} \right\}$$

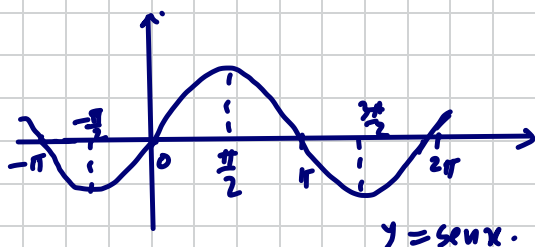
$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

$$p = \frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{12\pi}{12} = \pi$$

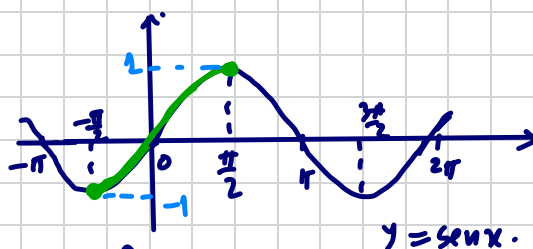
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

FUNÇÃO ARCO SENOS: Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$; queremos uma função que, dado o valor de $y = f(x)$, determine o x ; ou seja a que seja a função inversa para o seno, ou seja; queremos obter o valor de arco no qual seno assume um dado valor y .

O primeiro problema que temos é que o seno, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, não é inversível.



Para ter uma "inversa", precisamos restringir o domínio e o contradomínio da função $y = \text{sen } x$ de modo ao gráfico ser bijetivo. Dessa forma, com uma restrição adequada $y = \text{sen } x$ pode tornar-se inversível. O comum a se fazer é considerar a parte pintada em verde na ilustração abaixo:



na parte em verde, $y = \text{sen } x$ é injetiva.

Então a função $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$,

dada por $f(x) = \sin x$ é bijetiva
(i.e., injetiva e sobrejetiva).

Logo, existe a inversa $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

dada por $x = f^{-1}(y)$;

e como $y = \sin x$, escreve-se

$$x = \arcsin(y)$$

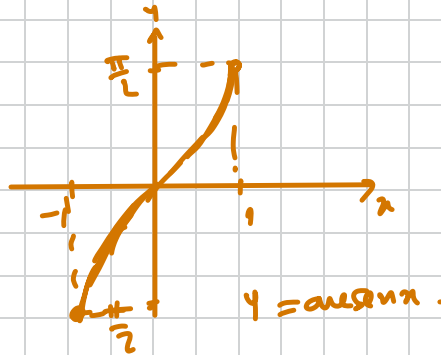
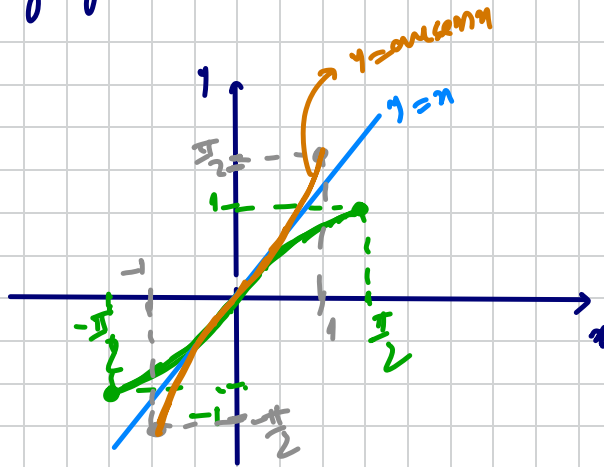
Obs. para facilitar a notação, pensa (e é)
conveniente) em:

- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ou seja, $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

$$f^{-1}(y) = \arcsin y$$

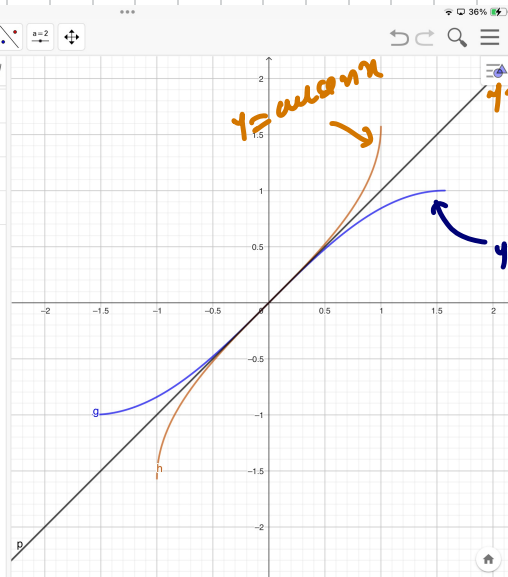
Esboço gráfico de $y = \arcsen x$:



19:48 Quarta-feira 23 de julho



- $f: y = \text{sen}(x)$
- $g(x) = \text{sen}(x), (-1.57 \leq x \leq 1.57)$
- $h: y = \text{sen}^{-1}(x)$
- $p: y = x$
- + Entrada...



$y = \arcsen(x)$ "arcseno"
 $y = x$ "identidade"
 $y = \text{sen}(x)$

ex. Esboce o gráfico de $y = \frac{\pi}{3} + \arcsen(1-x)$,
indicando domínio e imagem.

solução: Note que

$$y = \frac{\pi}{3} + \arcsen(1-x) \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{\pi}{3} = \arcsen(1-x) \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(y - \frac{\pi}{3}\right) = 1-x \Leftrightarrow$$

$$-x = -1 + \sin\left(y - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = 1 - \sin\left(y - \frac{\pi}{3}\right)$$

Outra vez, podemos esboçar o gráfico de

$y = 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ e, pelo espelhamento
em $y=x$, obter o gráfico da função desejada.

Antes disso, observe que, de maneira geral;

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Na nova cas ; temos:

$$y = \frac{\pi}{3} + \arcsin(1-x) \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{\pi}{3} = \arcsin(1-x)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq 1-x \leq 1 \quad \text{e} \\ -\frac{\pi}{2} \leq y - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right. ;$$

ou seja:

$$-1 \leq 1-x \leq 1 \quad + (-1)$$

$$-2 \leq -x \leq 0 \quad \times (-1)$$

$$2 \geq x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

$$\Rightarrow D(f) = [0, 2] ;$$

2

$$-\frac{\pi}{2} \leq y - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$+\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \leq y - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{-3\pi + 2\pi}{6} \leq y \leq \frac{3\pi + 2\pi}{6}$$

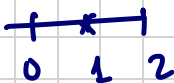
$$-\frac{\pi}{6} \leq y \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\implies \text{Im}(f) = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$$

Veja em uma extremidade do domínio:

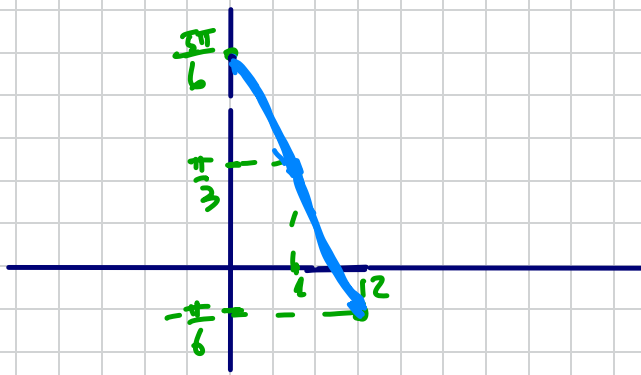
$$D(f) = [0, 2]$$

x	$y = \frac{\pi}{3} + \arcsen(1-x)$
0	$\frac{\pi}{3} + \arcsen(+1) = \frac{\pi}{3} + \left(+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$
2	$\frac{\pi}{3} + \arcsen(-1) = \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$
	$\frac{\pi}{3} + \arcsen(0) = \frac{\pi}{3}$

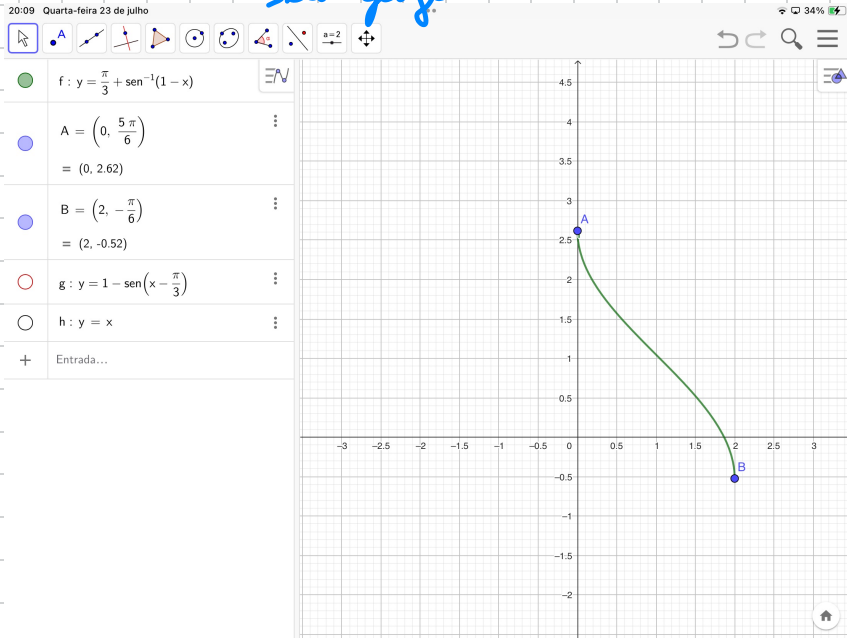


①

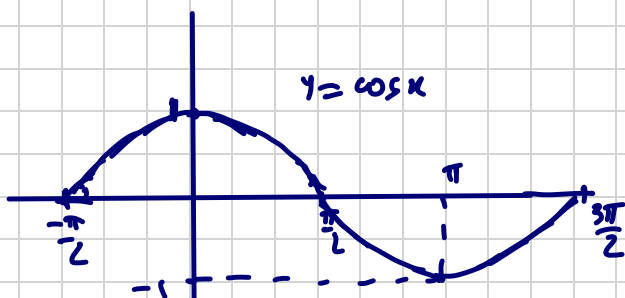
meio do intervalo



Solo geogebra:



FUNÇÃO ARCO-COSSENO: Da mesma forma que a função arco-seno, devemos restringir o domínio e o contradomínio da função coseno de modo a se obter uma inversa.



O intervalo adequado para coseno ser injetivo será $[0, \pi]$:



Então, redefinimos o coseno injetivo por

$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1];$$

$$f(x) = \cos x.$$

Então, vai existir a função inversa

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$f^{-1}(y) = x = \arccos(y)$$

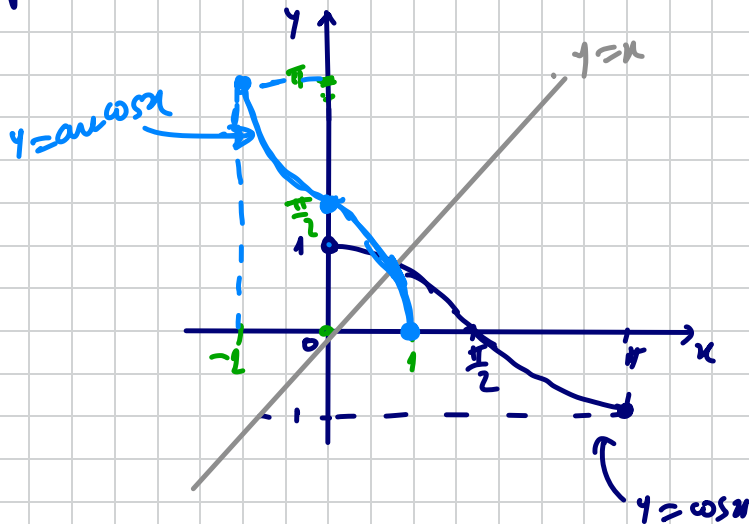


$$0 \leq y \leq \pi \text{ e } -1 \leq x \leq 1.$$

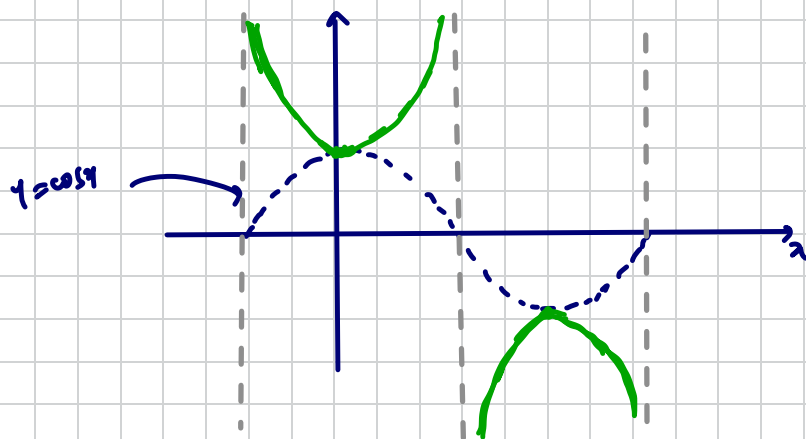
obs.1 Para entender a notação:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

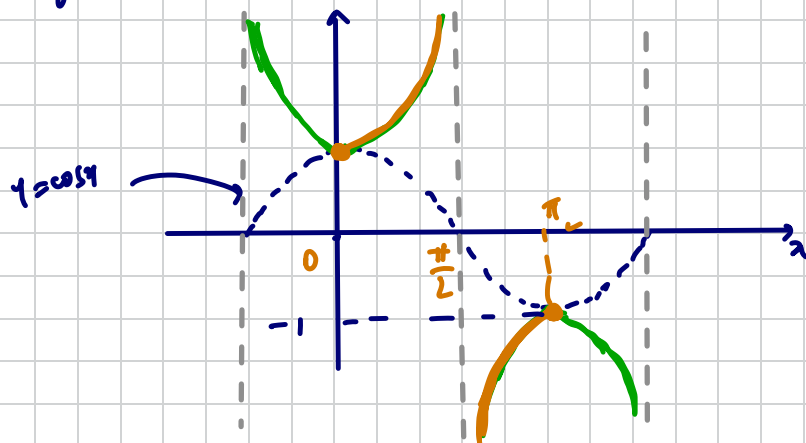
gráfico de $y = \arccos x$:



FUNÇÃO ARCO SECANTE: A função secante não é injetiva em todo o seu domínio. Portanto, vamos precisar restringir domínio e contradomínio de modo a existir uma inversa.



A parte destacada em laranja torna a função bijetiva:



Seja, redefina

$$f: [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$f(x) = \sec x.$$

e' bijetiva por construçao.

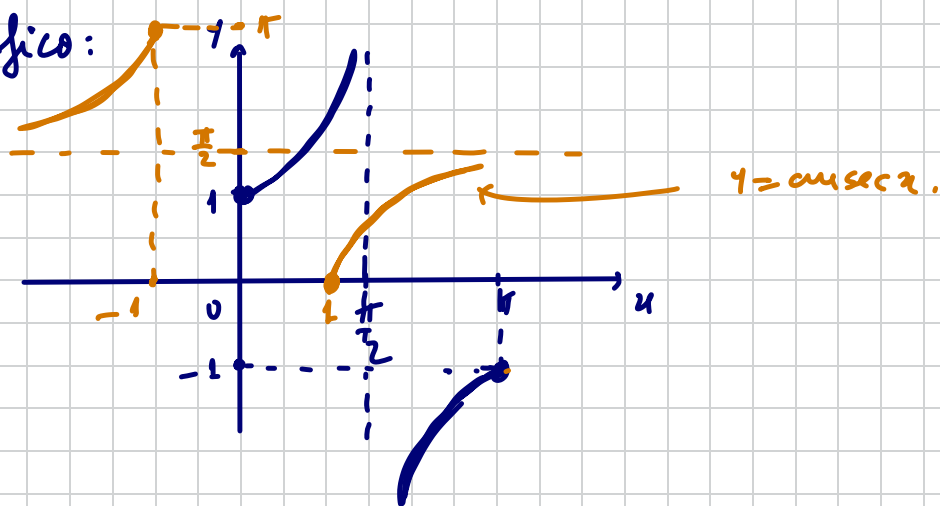
$$\text{Então, } \exists f^{-1}: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi];$$

$$x = \operatorname{arccsec}(y)$$



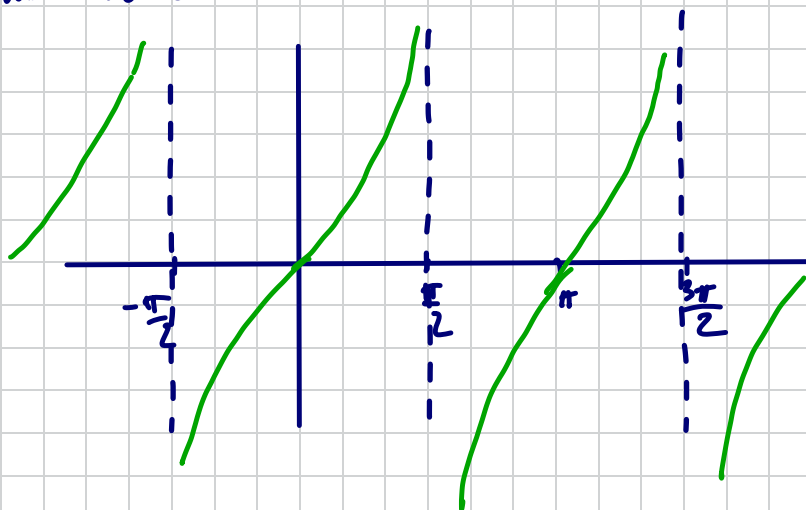
$$\left\{ \begin{array}{l} y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1. \\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{array} \right.$$

gráfico:

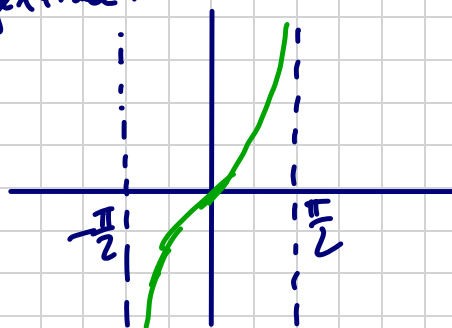


De forma análoga pode-se definir a
função $y = \arccsc x$. (fica como exercício)

FUNÇÃO ARCO TANGENTE: O gráfico de $y = \tan x$ é
lembrado abaixo:



Restringendo a tangente no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
ela fica bijetiva:



ou seja, redefinimos $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \tan x.$$

Logo, existe inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$x = f^{-1}(y) = \arctan y$$

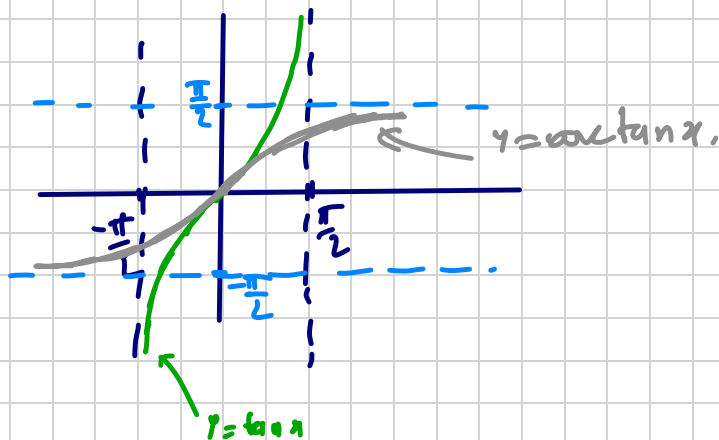
ou seja, definimos $g: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$y = g(x) = \arctan x$$

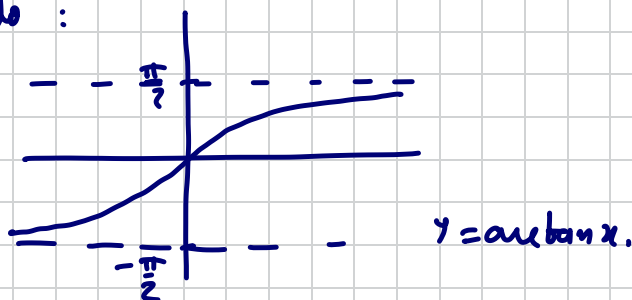


$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} ; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Gráfico da função arco tangente:



"limpando":



De forma análoga pode-se definir a função

$$y = \arccos x.$$

Ex.: Esboce o gráfico de $y = \frac{\pi}{4} + \arctan(1+x)$,
indicando domínio e imagem.

Solução:

$$y - \frac{\pi}{4} = \arctan(1+x)$$

$$\uparrow$$
$$1+x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R}.$$

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

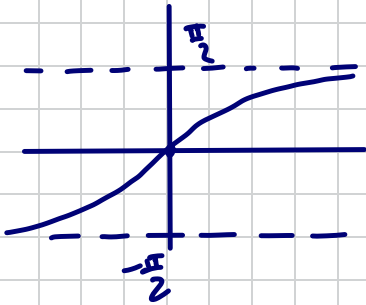
$$-\frac{\pi}{2} < y - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \quad \left(+ \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

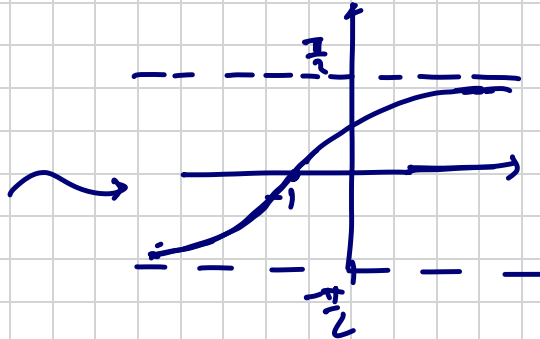
$$\uparrow -\frac{\pi}{4} < y < \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

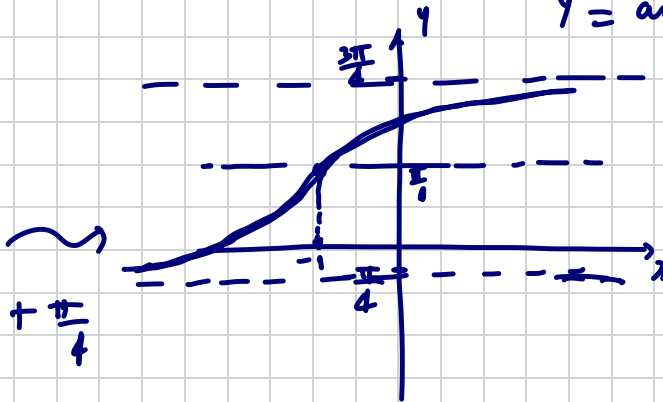
$$y = \frac{\pi}{4} + \arctan(1+x)$$



$$y = \arctan x$$



$$y = \arctan(1+x)$$



$$y = \frac{\pi}{4} + \arctan(1+x)$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

[USAMOS TRANSLAÇÕES PARA O ESBOÇO, COMO EM FUNÇÕES ELEMENTARES]

Outro exercício: Esboce o gráfico de

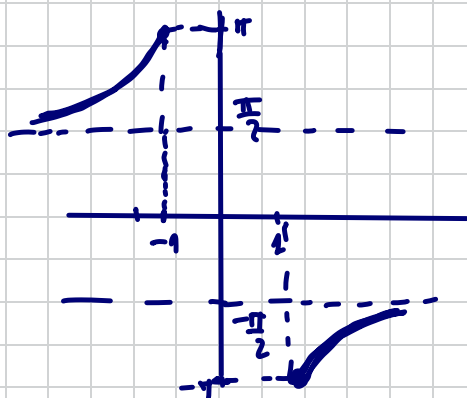
$$y = \frac{\pi}{6} - \arcsin(2+x),$$

indicando domínio e imagem.

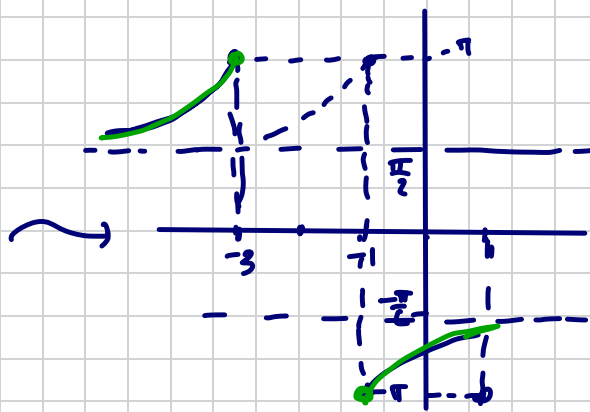
Solução:

$$y - \frac{\pi}{6} = -\arcsin(2+x) \quad \times (-1)$$

$$\frac{\pi}{6} - y = \arcsin(2+x)$$

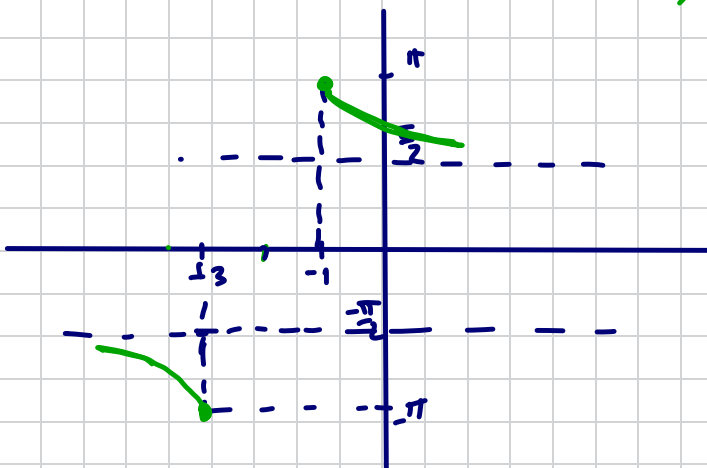


$$y = \arcsin x$$



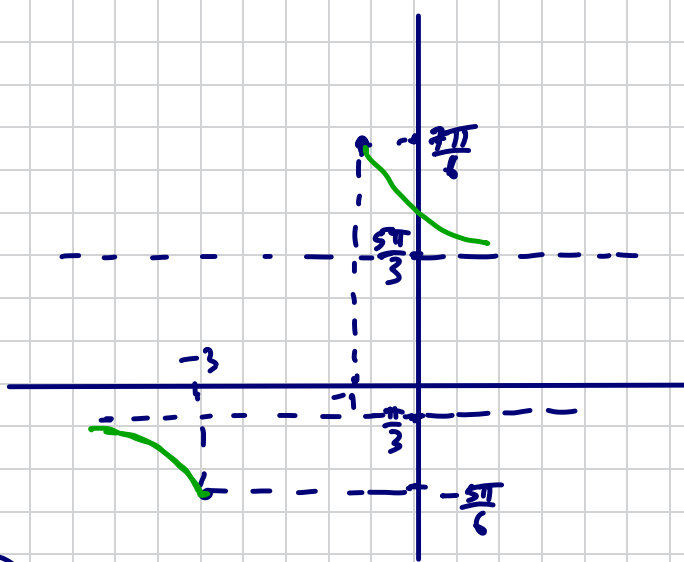
$$y = \arcsin(2+x)$$

$\times (-1)$



$$y = -\arcsin(2+x)$$

$$\sim +\frac{\pi}{6}$$



$$D(f) = (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$$

$$Im(f) = [-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{6}]$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$$

$$-\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$