FUNÇÕES TRANSCEDENTAIS

02/07/25 - AULA 09

Na aula anterior estudamos as fórmulas de adição e da subtração do seno e do cosseno:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b + \operatorname{sen}b \cos a$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b - \operatorname{sen}b \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b.$$

Vamos determinar as fórmulas de adição e da subtração da tangente:

$$\tan(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen}a \cdot \cos b + \operatorname{sen}b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}a \cdot \cancel{\cos b}}{\cos a \cdot \cancel{\cos b}} + \dfrac{\operatorname{sen}b \cdot \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cdot \cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a} \cdot \cos b}{\cancel{\cos a} \cdot \cos b} - \dfrac{\operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b}{\cos a \cdot \cos b}} =$$

DIVIDIMOS NUM. E DENOMINADOR POR $\cos a \cdot \cos b$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}}$$

- $\tan(a-b) = ?$

$$\tan(a-b) = \tan(a+(-b)) = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \cdot \tan(-b)}.$$

Como $\tan(-b) = -\tan b$, obtemos:

$$\boxed{\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}}$$

Ex.: Determine o valor de $\tan 75^\circ$.

solução:

$\tan(75^\circ) = \tan(30^\circ + 45^\circ) =$

$$= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \cdot \tan 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}+3}{\cancel{3}}}{\frac{3-\sqrt{3}}{\cancel{3}}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \times \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{6} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$$

FÓRMULAS DO ARCO DUPLO:

No que segue apresentamos as fórmulas para arcos da forma $2a$. (arcos duplos). Para isso, basta observar nas fórmulas de adição, que $2a = a + a$. Assim:

- $\text{sen}\, 2a = \text{sen}\,(a+a) = \text{sen}\, a \cdot \cos a + \text{sen}\, a \cdot \cos a$

$$= 2 \cdot \text{sen}\, a \cdot \cos a.$$

Ou seja, obtemos a fórmula do seno do

arco duplo:

$$\boxed{\operatorname{sen} 2a = 2\cdot\operatorname{sen}a\cdot\cos a}$$

Do mesmo modo:

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a\cdot\cos a - \operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}a$$

$$= \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \quad ;$$

ou seja:

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}$$

obs: Não confundir esta fórmula com a relação trigonométrica fundamental, que é

$$\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1 .$$

- $\tan 2a = \tan(a+a) = \dfrac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a\cdot\tan a} = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

Ou seja:

$$\boxed{\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}$$

Ex.: Use a fórmula do seno do arco duplo para determinar sen 60°.

Sol.: $\text{sen}\,60° = \text{sen}\,(2\cdot 30°) = 2\cdot\text{sen}\,30°\cdot\cos 30°$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

FÓRMULAS DO ARCO-METADE:

Combinando a fórmula do cosseno do arco duplo:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \quad ; \qquad (*)$$

com a relação trigonométrica fundamental:

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \quad ;$$

isolando $\text{sen}^2 a$ nesta última igualdade, vem

$$\text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a \quad ;$$

e substituindo em (*) vamos obter:

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) =$$

$$= \cos^2 a - 1 + \cos^2 a = \underbrace{2\cos^2 a - 1}.$$

Isolando $\cos^2 a$, vem:

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$$

$$\Rightarrow \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\Rightarrow \cos a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}$$

Escrevendo $2a = x$, teremos $a = \frac{x}{2}$, e assim:

$$\boxed{\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}$$

(FÓRMULA DO COSSENO DO ARCO METADE)

Isolando $\cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 a$ da relação fundamental, levando em (*) vamos obter,

$$\cos 2a = (1 - \operatorname{sen}^2 a) - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} a = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

Escrevendo $2a = x$ segue que $a = \frac{x}{2}$ e disso:

$$\boxed{\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}$$

(FÓRMULA DO SENO DO ARCO-METADE)

Para o cálculo da tangente do arco metade faz-se:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{1+\cos x}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

CONCLUSÃO:

$$\boxed{\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}$$

(FÓRMULA DA TANGENTE DO ARCO-METADE)

Ex.: Calcule o valor de $\tan 67{,}5°$.

Sol.: Note que $2\times 67{,}5° = 135°$.

Assim sendo $\frac{x}{2} = 67{,}5° \Longrightarrow x = 135°$.

Disso:

$$\tan 67{,}5° = +\sqrt{\frac{1-\cos 135°}{1+\cos 135}}$$; e como

$67{,}5° \in 1^{\circ}q$

$$\cos 135° = -\cos(180°-135°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$135° \in 2^{\circ}q$

Assim:

$$\tan 67{,}5^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 135^\circ}{1+\cos 135^\circ}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{2-\sqrt{2}}{\cancel{2}}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$$

FÓRMULAS DA PROSTAFÉRESE OU DE TRANSFORMAÇÃO DE SOMA EM PRODUTO.

PROP.: Valem as seguintes fórmulas:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

DEMONSTR.: Para provar as duas primeiras usaremos as fórmulas:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a \qquad (\text{I})$$

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a. \qquad (\text{II})$$

Somando (I) + (II) vamos obter:

$$\text{sen}(\underbrace{a+b}_{:=p}) + \text{sen}(\underbrace{a-b}_{:=q}) = 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \cos b. \qquad (*)$$

Denotando $\begin{cases} a + \cancel{b} = p \\ a - \cancel{b} = q \end{cases}$ $+$

$2a = p + q$

$\Rightarrow \boxed{a = \dfrac{p+q}{2}}$

$a + b = p$

$\Rightarrow b = p - a$

$b = p - \dfrac{p+q}{2}$

$\Rightarrow \boxed{b = \dfrac{p-q}{2}}$;

e então; (*) fica:

$$\text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right);$$

provando a 1ª identidade.

Fazendo a diferença (I) – (II) vamos obter:

$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2 \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos a \;;$$

e novamente, fazendo $a+b=p$ e $a-b=q$;

segue que

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Para provar as duas últimas identidades, basta considerar as fórmulas

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \qquad (III)$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \qquad (IV);$$

e procedendo como nos anteriores, fazendo (III) + (IV) e depois (III) – (IV); vamos obter as duas últimas identidades.

$\square$

Ex.: LISTA 04:

22. Mostre que

(a) $\operatorname{sen} 40° + \operatorname{sen} 20° = \cos 10°$.

(b) $\operatorname{sen} 105° + \operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

(c) $\cos 130° + \cos 110° + \cos 10° = 0$.

(d) $\cos 220^0 + \cos 100° + \cos 20° = 0$.

(d) $\cos 220° + \cos 100° + \cos 20° \overset{?}{=} 0$

$\cos 220° + \cos 100° + \cos 20° = (\cos 220° + \cos 100°) + \cos 20° =$

$= 2 . \cos\left(\frac{220° + 100°}{2}\right) . \cos\left(\frac{220° - 100°}{2}\right) . + \cos 20° =$

$\cos p + \cos q = 2 . \cos \frac{p+q}{2} . \cos \frac{p-q}{2}$

$= 2 . \underline{\cos 160°} . \cos 60° + \cos 20° =$

$\cos 160° = -\cos(180° - 60°) = -\cos 20°$

$= 2 . (-\cos 20°) . \cos 60° + \cos 20° =$

$= -\cancel{2} . \cos 20° . \frac{1}{\cancel{2}} + \cos 20° = -\cos 20° + \cos 20° = 0$ //