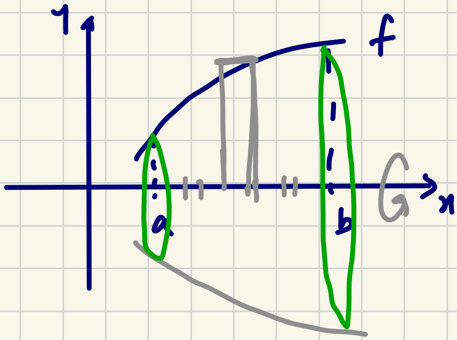
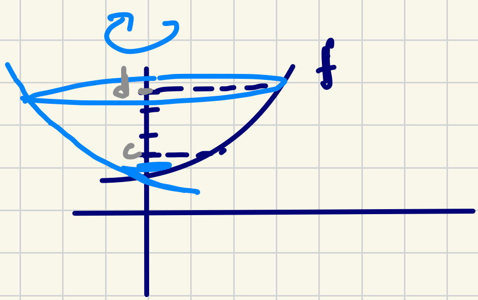
CÁLCULO II

30/07/25 - AULA 23

Na aula passada, vimos o método do disco para determinar o volume V de um sólido S ao girar uma dada região em torno de um eixo (o eixo onde se faz a partição do intervalo)



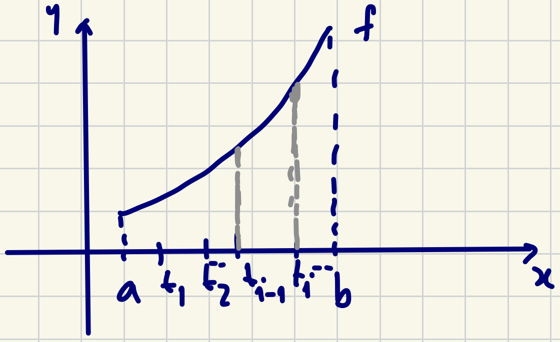
$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$



$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 \, dy$$

[girando em torno do eixo y, e a partição neste mesmo eixo.]

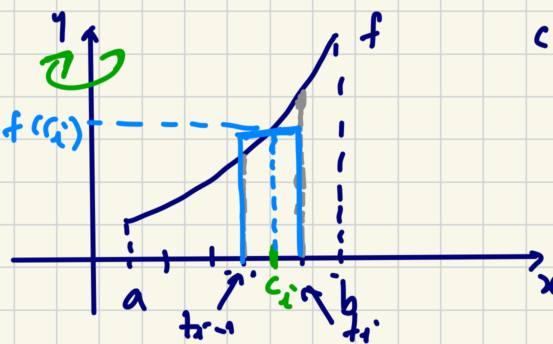
MÉTODO DO INVÓLUCRO CILÍNDRICO: Diferentemente do método do disco estudado na aula anterior e recordado acima, o método do invólucro cilíndrico consiste em girar o gráfico da f no eixo em que não foi feita a partição. Ou seja, se a partição do intervalo $[a,b]$ é no eixo horizontal, o giro será feito no eixo vertical e vice-versa



Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ partição de $[a,b]$ no eixo OX, dividindo este intervalo em subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$.

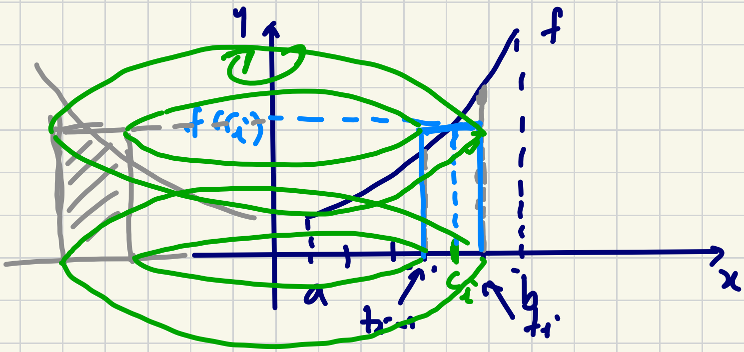
Seja $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$; c_i o ponto médio, i.e.;

$$c_i = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}$$

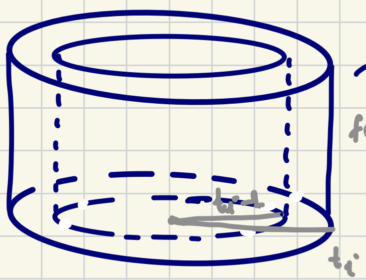


obtemos um retângulo elementar de base
$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ e altura $f(c_i)$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Girando em torno do eixo OY, vamos obter
uma "casca" ou um invólucro cilíndrico.



$\Downarrow$



i-ésimo invólucro cilíndrico.

Seu volume será:

$$V_i = \underbrace{Ab.h}_{\text{EXTERNO}} - \underbrace{Ab.h}_{\text{INTERNO}}$$

$$V_i = \pi.(t_i)^2.f(c_i) - \pi.(t_{i-1})^2.f(c_i)$$

$$V_i = \pi.f(c_i).(t_i^2 - t_{i-1}^2)$$

$$V_i = \pi \cdot f(c_i) \cdot \underbrace{(t_i + t_{i-1})}_{= 2 \cdot c_i} \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i}$$

$$\Rightarrow V_i = \pi \cdot f(c_i) \cdot 2 c_i \cdot \Delta t_i$$

$$= 2\pi \cdot c_i \cdot f(c_i) \Delta t_i$$

O volume $\tilde{V}$ aproximado do sólido S será:

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \, c_i \cdot f(c_i) \Delta t_i ,$$

uma <u>soma de Riemann.</u>

Então, se f for integrável em $[a,b]$, o volume V será:

$$V = \lim_{n \to \infty} \tilde{V} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \, c_i \, f(c_i) \Delta t_i =$$

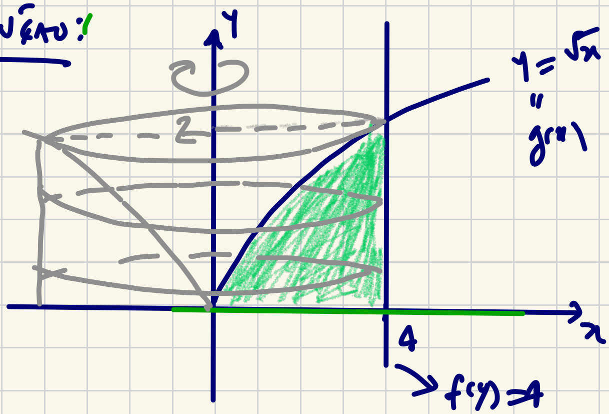
$$= \int_a^b 2\pi \, x \, f(x) \, dx = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \, dx}$$

FÓRMULA DO VOLUME PELO MÉTODO DO INVÓLUCRO CILÍNDRICO.

Ex: Utilize o método do invólucro cilíndrico para determinar o volume do sólido determinado ao girar a região formada pelas curvas $y=\sqrt{x}$, $x=4$ e $y=0$, em torno do eixo y.

SOLUÇÃO:



$$V = \pi\int_0^2 \underbrace{f(y)^2}_{4}\,dy \quad - 2\pi\int_0^4 x\cdot g(x)\,dx.$$

ou: $Ab\, h = \pi\cdot(4)^2\cdot 2$

$= 32\pi$

[cilindro "cheio"]

$$= \pi\int_0^2 (4)^2\,dy \quad - 2\pi\int_0^4 x\cdot\sqrt{x}\,dx$$

$$= 16\pi \cdot y\Big|_0^2 - 2\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$x^{5/2} = \sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x}$$

$$- 32\pi - 2\pi \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 =$$

$$= 32\pi - \frac{4\pi}{5} \cdot \left(4^2\sqrt{4} - 0\right)$$

$$= 32\pi - \frac{4\pi}{5} \cdot 32 = \frac{160\pi - 128\pi}{5}$$

$$= \frac{32\pi}{5} \text{ u.v.}$$