CÁLCULO II

18/07/25 – AULA 20

APLICAÇÕES DIVERSAS DE INTEGRAIS (LISTA 07)

3. Se a aceleração de uma partícula que se move com velocidade variável v é $-kv^2$, onde k é uma constante e se v_0 é a velocidade quando $t = 0$, mostre que

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt.$$

$a = -k \cdot v^2$; k – constante

$t = 0$; $v(0) = v_0$.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \cdot dt$$

$$\Rightarrow dv = -k \cdot v^2 \cdot dt$$

$$\frac{dv}{v^2} = -k \cdot dt$$

$$\rightarrow \int \frac{dv}{v^2} = \int -k \cdot dt$$

$$\int v^{-2} dv = -k \cdot \int dt$$

$$\frac{v^{-1}}{-1} = -k \cdot t + C$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{r} = -k \cdot t + C} \quad (*)$$

quando $t = 0$; $r = r_0$; e disso: (condição inicial)

$$-\frac{1}{r_0} = -k \cdot 0 + C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{r_0}}$$

Assim; $(*)$ fica:

$$-\frac{1}{r} = -k \cdot t - \frac{1}{r_0} \qquad (\times -1)$$

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + k \cdot t}$$

4. De acordo com a lei da gravitação de Newton, duas partículas quaisquer de massas M e m se atraem com uma força F cuja grandeza é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre elas, ou seja,

$$F = G\frac{Mm}{r^2},$$

onde G chama-se *constante de gravitação*. Se M está fixado na origem, qual o trabalho exigido para mover m de $r = a$ para $r = b$, onde $a < b$? Obs.: O *elemento de trabalho* é dado por $dW = Fdr$. (Resp.: $\cancel{W} = GMm(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$).

$w(b) - w(a)$

$$dw = F \cdot dr$$

$$dw = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}\, dr$$

$$\Rightarrow \int dW = \int \frac{G.M.m}{r^2}\,dr$$

$$W = G.M.m \int \frac{dr}{r^2} = G.M.m.\int r^{-2}\,dr$$

$$\Rightarrow W = G.M.m.\frac{r^{-1}}{-1} + C$$

$$\underset{W(r)}{\underset{\shortparallel}{W}} = -\frac{G\,M.m}{r} + C =$$

Dimo:

$$W(b) - W(a) = -\frac{G\,M\,m}{b} + C - \left(-\frac{G\,M.m}{a} + c\right)$$

$$= -\frac{G\,M.m}{b} \cancel{+c} + \frac{G.M.m}{a} \cancel{-c}$$

$$= G\,M\,m.\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

5. A resistência do ar de um automóvel, dentro de certos limites de velocidade, é proporcional à velocidade. Assim, se F é a força líquida gerada pelo motor, temos

$$M\frac{dv}{dt} = F - kv.$$

Exprima a velocidade em termos de t, sabendo que $v = 0$ quando $t = 0$.
(Resp.: $v = \frac{F}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{M}})$)

↳ condição inicial.

$v = v(t) = ?$; $t = 0 \Rightarrow v = 0$

$$M \cdot \frac{dv}{dt} = F - k \cdot v$$

$$M \cdot dv = (F - k \cdot v)\, dt$$

$$M \cdot \frac{dv}{F - k \cdot v} = dt$$

Integrando, vem:

$$\int \frac{M \cdot dv}{F - k \cdot v} = \int dt$$

$$\frac{M}{-k} \int \frac{-k\, dv}{F - kv} = t + c$$

$$\int \frac{dw}{w} = \ln|w| + c$$

$w = F - kv \Rightarrow dw = -k\, dv$

$$\Rightarrow -\frac{M}{k} \cdot \ln|F - k \cdot v| = t + c$$

$$\ln|F-k v| = -\frac{k}{m}\cdot(t+c)$$

$$e^{\ln|F-kv|} = e^{-\frac{k}{m}(t+c)} > 0$$

$$\boxed{F-k\cdot v = e^{-\frac{k}{m}(t+c)}} \quad (*)$$

Pela condição de existência $t=0 \Rightarrow v=0$; tem-se:

$$F-k\cdot 0 = e^{-\frac{k}{m}\cdot(0+c)}$$

$$F = e^{-\frac{k\cdot c}{m}} \Rightarrow \ln F = \ln e^{-\frac{k\cdot c}{m}}$$

$$\Rightarrow \ln F = -\frac{k\cdot c}{m}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{m}{k}\cdot\ln F$$

$$\Rightarrow c = \ln(F)^{-\frac{m}{k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{c} = F^{-\frac{m}{k}}} \quad (**)$$

Assim, $(*)$ fica:

$$F-k\cdot v = e^{-\frac{k}{m}(t+c)} = e^{-\frac{k}{m}\cdot t}\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot c}$$

$$= e^{-\frac{k}{m}\cdot t}\cdot\left(e^{c}\right)^{-\frac{k}{m}} =$$

$$= e^{-\frac{k}{m}\cdot t} \cdot \left(F^{-\cancel{\frac{m}{k}}}\right)^{-\cancel{\frac{k}{m}}} = F \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

(**)

$$\Rightarrow \quad F - k \cdot v = F \cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t} \quad ; \text{ ou seja;}$$

$$F - F \cdot e^{-\frac{k}{m}t} = k \cdot v$$

$$F\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\cdot t}\right) = k \cdot v$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{F}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{k}{m}\cdot t}\right)}$$

6. **(Decaimento radioativo)** Se N é o número de átomos radioativos presente num certo material em um instante de tempo t, então, a equação que descreve o decaimento é dada por

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

que estabelece que a variação de caimento do material radioativo em relação ao tempo é proporcional à massa de material radioativo no referido instante de tempo, onde λ é a constante de decaimento. Se N_0 é o número de átomos radioativos no instante inicial $t = 0$ e N é o número de átomos no instante t, mostre que a equação acima determina $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

condição inicial: $t = 0$; $N = N_0$

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N \quad \Rightarrow \quad -\frac{dN}{N} = \lambda \cdot dt \quad (\times -1)$$

$$\frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt$$

Integrando, vem:

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt$$

$$\ln|N| = -\lambda t + c$$

$$e^{\ln|N|} = e^{-\lambda t + c} = \underbrace{e^{c}}_{\substack{\shortparallel \\ K}} \cdot e^{-\lambda t}$$

$$e^{\ln|N|} = \underbrace{K}_{>0} \cdot \underbrace{e^{-\lambda t}}_{>0} \quad >0$$

$$N = K \cdot e^{-\lambda t} .$$

Quando $t = 0$; $N = N_0$ e disso:

$$N_0 = K \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = K \cdot e^{0} = K \cdot 1 = K$$

$$\longrightarrow K = N_0 .$$

Assim, obtemos:

$$N = K \cdot e^{-\lambda t} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$\square$

---

9. **(Voltagem de um capacitor sendo descarregado)** Suponha que as cargas elétricas acumuladas em um capacitor estejam escapando astravés de seus terminais a uma taxa proporcional à voltagem V e que, se t for medido em segundos,

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V.$$

Encontre V nessa equação, usando a notação V_0 para denotar o valor de V quando $t = 0$. Quanto tempo a voltagem demorará para atingir 10% de seu valor inicial?

condição inicial: $t=0 \Rightarrow V = V_0$.

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{40} \cdot dt \quad .$$

Integrando, vem:

$$\int \frac{dV}{V} = -\frac{1}{40}\int dt$$

$$\ln|V| = -\frac{1}{40}t + C$$

$$e^{\ln|V|} = e^{-\frac{1}{40}t + C} = e^{-\frac{1}{40}t} \cdot \underbrace{e^{C}}_{= k}$$

$$\Rightarrow \quad V = k \cdot e^{-\frac{1}{40}t} \; ;$$

e pela condição inicial, tem-se:

$$V_0 = k \cdot e^{-\frac{1}{40} \cdot 0} \Rightarrow V_0 = k \; .$$

Disso, obtemos:

$$\boxed{V = V_0 \cdot e^{-\frac{1}{40}t}}$$

Agora, queremos determinar t tal que $V(t) = \frac{10}{100} V_0$
$= \frac{1}{10} V_0.$

$$\frac{1}{10} \cancel{V_0} = \cancel{V_0} \cdot e^{-\frac{1}{40}t}$$

$$\frac{1}{10} = e^{-\frac{1}{40}t}$$

$$\ln \frac{1}{10} = \ln e^{-\frac{1}{40}t}$$

$$\underbrace{\ln 1}_{0} - \ln 10 = -\frac{1}{40} t$$

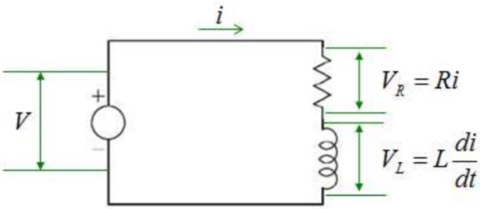
$$\Rightarrow \quad t = 40 \cdot \ln 10 \text{ segundos.}$$

$$t \approx 92{,}10 \text{ segundos.}$$

$$\approx 1 \text{ min } 32 \text{ seg.}$$

DE UMA PROVA ANTIGA, DE 2018:

Questão 04. Considere o circuito RL-série conforme o esquema abaixo, formado por um indutor de indutância L Henrys, um resistor de resistência R Ohms e uma fonte de tensão V volts.



Se i for a corrente elétrica no circuito, a queda de tensão sobre o resistor R é dada por $V_R = R \cdot i$, já a queda de tensão sobre o indutor L será $V_L = L \cdot \frac{di}{dt}$. Então, pela lei das tensões de Kirchoff tem-se que

$$V = V_R + V_L.$$

(a) Sabendo que quando $t = 0$ tem-se $i = 0$, mostre que a corrente elétrica $i = i(t)$ é dada por

$$i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

(b) Se $R = 10\Omega$, $L = 3H$ e $V = 50$ volts, determine a corrente elétrica $i = i(t)$ em função do tempo.

$$V = V_R + V_L$$

(a) $t = 0$; $i = 0$

$$V = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$V - R \cdot i = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$dt = \frac{L\,di}{V - Ri}$$

Integrando, vem:

$$\int dt = \int \frac{L\,di}{V - Ri} = \frac{L}{-R} \cdot \int \frac{-R\,di}{V - Ri}$$

$$\int \frac{dw}{w}$$

$$w = V - Ri$$

$$dw = \underline{-R\,di}$$

$$\int dt = -\frac{L}{R} \int \frac{-R\,di}{V - Ri}$$

$$t = -\frac{L}{R} \cdot \ln|V - Ri| + C$$

$$t - C = -\frac{L}{R} \ln|V - Ri|$$

$$\frac{R}{L}(C - t) = \ln|V - Ri|$$

$$\Rightarrow e^{\frac{R}{L}(C-t)} = e^{\ln|V - Ri|} = V - Ri$$

$$Ri = V - e^{\frac{R}{L}(C-t)}$$

$$i = \frac{V}{R} - \frac{1}{R} \cdot e^{\frac{R}{L}(C-t)}$$

Pela condição inicial; $t = 0$; $i = 0$; e disso:

$$0 = \frac{V}{R} - \frac{1}{R} \cdot e^{\frac{R}{L}(c-0)}$$

$$-\frac{V}{\cancel{R}} = -\frac{1}{\cancel{R}} e^{\frac{R \cdot c}{L}}$$

$$\boxed{V = e^{\frac{R}{L} \cdot c}}$$

Dimo:

$$i = \frac{V}{R} - \frac{1}{R} \cdot \left[\underbrace{e^{\frac{R}{L} c}}_{V} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right]$$

$$\Rightarrow i = \frac{V}{R} - \frac{1}{R} \cdot V \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$\Rightarrow \boxed{i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right)}$$

(b) temos $R = 10\,\Omega$; $L = 3\,H$; $V = 50\,V$;

achar $i(t)$:

$$i = \frac{50}{10} \cdot \left(1 - e^{-\frac{10}{3} t}\right) =$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{10}{3} t}\right)}.$$