

Encerramos a aula passada com os conceitos de convergência simples e uniforme para seqüências de funções:

Def.: Dada uma seqüência $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$;

demostramos que:

(1) f_n converge para $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ simplesmente,

e escrevemos $f_n \rightarrow f$ s, e somente se:

$$\forall z \in \Omega; \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que, } \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

(2) f_n converge para $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uniformemente,

e escrevemos $f_n \Rightarrow f$ u, e somente se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que, } \forall z \in \Omega, \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Usa que segue apresentamos alguns exemplos:

01) Considere a seqüência complexa $f_n(z) = \frac{1}{n^2}$
 $f_n: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}.$

AF 01: $f_n(z) \rightarrow f \equiv 0$ no conjunto onde $0 < |z| < 1$.
(convergência simples)

De fato, dado $\varepsilon > 0$, precisamos obter $n_0 \in \mathbb{N}$
(e tal n_0 dependerá de ε e do ponto $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.)
tal que $|f_n(z) - 0| < \varepsilon$.
 $\parallel$
 $f(z)$

Notar que:

$$|f_n(z) - 0| = |f_n(z)| = \left| \frac{1}{n z} \right| = \frac{1}{n \cdot |z|}$$

(desde $|z| < 1$, mas
tomando o inverso,
teríamos $\frac{1}{|z|} > 1$;
e tal estimativa
não serve).

Assim; $\forall n \geq n_0$;
tem-se: $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$

$$|f_n(z) - 0| = \frac{1}{n \cdot |z|} \leq \frac{1}{n_0 \cdot |z|} := \varepsilon$$

$$\text{Ou seja, obtemos } n_0 \cdot |z| = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \frac{1}{\varepsilon |z|},$$

isto é; $n_0 = n_0(\varepsilon, z)$.

Logo, $f_n(z) = \frac{1}{n z} \rightarrow f(z) \equiv 0$, e essa
convergência é simples.

AF-02 $f_n \not\equiv 0$ na região onde $|z| < 1$.

Sei também, suponha que $f_n \equiv 0$.

Então, dado $\varepsilon > 0$, tal que $\varepsilon < 1$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$, e considere o número complexo

$$z = \frac{1}{n_0} + 0i, \text{ que é tal que } |z| < 1$$

Assim; para tal z e n_0 , tem-se:

$$\underbrace{|f_{n_0}(z) - 0|}_{\text{}} = \left| f_{n_0}\left(\frac{1}{n_0}\right) \right| = \left| \frac{1}{\underbrace{n_0 \cdot \frac{1}{n_0}}_z} \right| = \underbrace{1}_{> \varepsilon}.$$

↑
pois $n_0 > 1$

Portanto, a convergência não é uniforme.

02) $f_n(z) = \frac{1}{n z}$; $f_n: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, na região onde $|z| \geq 1$.

Neste caso, a convergência não é uniforme, pois $\forall \varepsilon > 0$, tem-se que existe n_0 universal (ou seja, $n_0 = n_0(\varepsilon)$), tal que, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $|f_n(z) - 0| < \varepsilon$.

(e então, $f_n \rightarrow 0$). De fato:

$$|f_n(z) - 0| = \left| \frac{1}{n \cdot z} \right| = \frac{1}{n \cdot |z|} \leq \frac{1}{n \cdot 1} = \frac{1}{n}.$$

$$|z| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} \leq 1$$

Então, $\forall n \geq n_0$; $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$, e daí:

$$|f_n(z) - 0| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} := \varepsilon.$$

Então, basta tomar $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} > 0$.

□

03) A sequência $f_n(z) = \frac{1}{1+nz}$ converge

uniformemente para $f(z) \equiv 0$ na região onde $|z| \geq 2$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$; basta analisar $|f_n(z) - 0|$:

$$|f_n(z) - 0| = |f_n(z)| = \left| \frac{1}{1+nz} \right| = \frac{1}{|1+nz|};$$

e como

$$|1+mz| = |mz+1| \geq |mz| - 1 = m|z| - 1 \geq m \cdot 2 - 1 = 2m - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|1+mz|} \leq \frac{1}{2m-1}$$

Alim, $\forall m > n_0$; tem-se $2m-1 \geq 2n_0-1$;

e então:

$$|f_m(z) - 0| = \frac{1}{|1+mz|} \leq \frac{1}{2m-1} \leq \frac{1}{2n_0-1} < \varepsilon$$

$$1 < (2n_0 - 1) \cdot \varepsilon$$

$$1 < 2n_0 \cdot \varepsilon - \varepsilon$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2n_0 \cdot \varepsilon > 1 + \varepsilon \\ n_0 > \frac{1 + \varepsilon}{2\varepsilon} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow n_0 = n_0(\varepsilon) ; \text{ ou seja; } f_m \rightarrow 0$$

Def.1 Uma sequência de funções $(f_n) \subset \Omega$ é uniformemente de Cauchy se, e só se; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(\varepsilon)$) tal que, $\forall m, n \geq n_0$, implica em $|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$, $\forall z \in \Omega$.

TEOREMA: Uma sequência de funções (f_n) converge uniformemente para f em Ω se, e somente se, (f_n) for uniformemente de Cauchy.

DEMONSTRAÇÃO:

$(\Rightarrow)$ Suponha que $f_n \Rightarrow f$ em Ω . Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(\varepsilon)$) tal que, $\forall n \geq n_0$, $\forall z \in \Omega$, $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Assim, $\forall m, n \geq n_0$, temos:

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &= |f_m(z) - f(z) + f(z) - f_n(z)| \leq \\ &\leq \underbrace{|f_m(z) - f(z)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f_n(z) - f(z)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, (f_n) é uniformemente de Cauchy.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, suponha que (f_n) seja uniformemente de Cauchy. A mostrar: a seq.

(f_n) é uniformemente convergente.

Como (f_n) é uniformemente de Cauchy, então, fixado $z_0 \in \Omega$, a sequência numérica $(f_n(z_0))_n$ é uma seq. de Cauchy. Portanto, é convergente (isto foi visto quando estudamos seqüências complexas numéricas). Então, $\exists f(z)$ tal que $f_n(z) \rightarrow f(z)$ (função limite), e isso, $\forall z \in \Omega$. (simplesmente)

Resta mostrar que tal convergência é uniforme.

Como (f_n) é uniformemente de Cauchy, então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0$, tem-se

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall z \in \Omega \quad (*)$$

Fixe $n \in \mathbb{N}$. ($n \geq n_0$). Então, passando (*) ao limite com $m \rightarrow \infty$, obtemos:

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall z \in \Omega;$$

ou seja,

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall z \in \Omega.$$

ou seja, $f_n \Rightarrow f$.

□

SÉRIES DE FUNÇÕES

Def.: Seja (f_n) uma sequência de funções $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$,
 $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow$ Então, $\forall z \in \Omega$, a sequência numérica
das somas parciais $(S_n(z))_n$ é dada por

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z), \quad \forall z \in \Omega.$$

Se, para cada z fixado, a série numérica
 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ for convergente, diremos que
a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é convergente.

Def.: Diremos que uma série de funções $\sum f_n$
converge simplesmente se a sequência das somas
parciais (S_n) converge simplesmente.

Neste caso, $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$; e

$$S_n(z) \rightarrow S(z), \text{ onde } S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(z),$$

é a função limite, que neste caso chamamos
soma da série.

Def.1 Dizemos que uma série de funções $\sum f_n$
converge uniformemente em Ω se a sequência
das somas parciais (s_n) converge uniformemente,
ou seja;

$$s_n(z) \Rightarrow S(z) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$$

tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |s_n(z) - S(z)| < \varepsilon, \forall z \in \Omega$.

TEOREMA: A série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente
em Ω se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,
 $\forall m \geq n_0, \forall z \in \Omega$, implica em

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} f_k(z) \right| < \varepsilon. \quad ; \quad p = 1, 2, 3, 4, \dots$$

DEMONSTR.: Note que $\sum f_n(z)$ converge unifor-
memente em $\Omega \Leftrightarrow (s_n)$ converge uniformemente
em $\Omega \stackrel{\text{TEOR.}}{\Leftrightarrow} (s_n)$ for uniformemente de Cauchy $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0$, implica

em $|S_m(z) - S_n(z)| < \varepsilon$, $\forall z \in \Omega$.

Logo, existe $m = m + p$; $p \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Analogamente:

$$|S_m(z) - S_n(z)| = |S_{m+p}(z) - S_m(z)| < \varepsilon,$$

e logo:

$\sum f_n$ converge uniformemente em $\Omega \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$

tal que, $\forall m, n > n_0$;

$$|S_m(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in \Omega;$$

onde:

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=2}^{m+p} f_k(z) - \sum_{k=1}^m f_k(z) \right| = |S_{m+p}(z) - S_m(z)| < \varepsilon$$

□

Def' Dizemos que uma série de funções $\sum f_n$ é absolutamente convergente quando a série dos módulos $\sum |f_n|$ for convergente.

TEOREMA (TESTE M DE WEIERSTRASS)

Seja (M_n) uma sequência de números reais.

Suponha que:

- $|f_n(z)| \leq M_n$, $\forall z \in \Omega$ e $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente

Então, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ é uniformemente convergente (e absolutamente) em Ω .

DEMONSTRAÇÃO: Como $|f_n(z)| \leq M_n$, $\forall z \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, pelo teste de comparação (cálculo III), segue que $\sum |f_n(z)|$ é convergente; e, portanto $\sum f_n(z)$ é absolutamente convergente em Ω .

Resta mostrar a convergência uniforme.

Para isto, usaremos o critério de Cauchy para séries (em $\mathbb{R}$) visto, semelhantemente, em cálculo III.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, então, dado $\varepsilon > 0$,

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq n_0$;

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \right| < \varepsilon \quad ; \quad p \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Assim; $\forall z \in \Omega$:

$$\begin{aligned} |S_m(z) - S_n(z)| &= \left| \sum_{k=1}^m f_k(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| = \\ &= \underbrace{\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right|}_{\leq M_k} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \underbrace{|f_k(z)|}_{\leq M_k} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon. \end{aligned}$$

$m = n+p$

e então segue a convergência uniforme em Ω .

□