VARIÁVEIS COMPLEXAS

18/06/25 - AULA 14

LIMITE E CONTINUIDADE

Do estudo anterior de topologia no plano complexo vimos o conceito de ponto de acumulação de um conjunto: $z_0 \in \mathbb{C}$ é um ponto de acumulação de um conjunto $P \subset \mathbb{C}$ se, e somente se, toda vizinhança perfurada de z_0 contiver elementos de P.

Mais precisamente $z_0 \in \mathbb{C}$ é ponto de acumulação de $P \subset \mathbb{C}$ se, e só se,

$$\forall \delta > 0, \quad \mathring{U}_\delta(z_0) \cap P \neq \emptyset.$$

PROPOSIÇÃO: Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é ponto de acumulação de um conj. P. se, e somente se, $\exists\, (z_n) \subset P$ (uma seq. em P), com $z_n \neq z_0, \forall n$ tal que $z_n \to z_0$.

DEMONSTRAÇÃO:

$(\Rightarrow)$ Suponha que $z_0 \in \mathbb{C}$ seja um ponto de acumulação de $P \subset \mathbb{C}$ (i.e., $z_0 \in P'$)

Disso;

$$\forall \delta > 0, \quad \mathring{\mathcal{U}}_\delta(z_0) \cap P \neq \emptyset;$$

ou seja; para $\delta > 0$ dado, $\exists\ z_n \in P$ tal que

$$0 < d(z_n, z_0) < \delta$$

$z_n \neq z_0, \forall n$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\delta_n = \frac{1}{n}$. Então, tem-se que

$$z_n \in \mathring{\mathcal{U}}_{\frac{1}{n}}(z_0) \cap P$$

ou seja,

$$0 < d(z_n, z_0) < \frac{1}{n}.$$

Tome $\varepsilon > 0$ qualquer. Então, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. [PROPRIEDADE ARQUIMEDIANA EM $\mathbb{R}$]

(*)

Assim, $\forall n \geq n_0$, tem-se que

$$0 < d(z_n, z_0) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \;;$$

$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$

$(*)$

ou seja, mostramos que $z_n \to z_0$. ;

com $z_n \in P$ e tal que $z_n \neq z_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, suponha que $\exists\, (z_n) \subset P$, com $z_n \neq z_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \to z_0$.

A mostrar: $z_0 \in P'$ (i.e; z_0 é ponto de acumulação do conj. P).

Como $z_n \to z_0$; então, tem-se,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow 0 < d(z_n, z_0) < \varepsilon$;

Pois $z_n \neq z_0$, $\forall n$.

ou seja, $z_n \in \mathring{U}_\varepsilon(z_0)$. Além disso, $z_n \in P$.

Portanto, $z_n \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\varepsilon}(z_0) \cap P$,

i.e., $z_n \in P'$.

$\square$

LIMITE DE FUNÇÃO COMPLEXA:

__Def.:__ Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função de uma variável complexa e $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto de acumulação de Ω. ($z_0 \in \Omega'$). Dizemos que $a \in \mathbb{C}$ é o limite da $f(z)$ quando z tende a z_0, e escrevemos

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C},$$

se, e somente se:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, $\forall z \in \Omega$ tal que

$$0 < d(z, z_0) < \delta \implies d(f(z), a) < \varepsilon.$$

Ex.: Seja $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ a função dada por

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \cdot Re(z) + 1.$$

Prove que $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$.

Solução: Note que, como $z = x+iy$, então:

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \cdot Re(z) + 1 =$$

$$= \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot x + 1 = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{ixy}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1$$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$, tal que $\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que $0 < d(z,0) < \delta$, implique em $|f(z) - 1| < \varepsilon$.

Analisando $|f(z) - 1|$; temos:

$$|f(z) - 1| = \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cancel{+1} \cancel{-1} \right| =$$

$$= \sqrt{\frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{x^2\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}} =$$

$$= \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z| = \underline{d(z,0) < \delta} := \varepsilon.$$

Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$.

$\square$

<u>PROPOSIÇÃO</u>: Se $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha \in \mathbb{C}$, então f é limitada numa vizinhança perfurada do ponto z_0, ou seja, existem $\delta > 0$ e $K > 0$ tais que $\forall z$ tal que $0 < d(z, z_0) < \delta$, implica em $|f(z)| < K$.

<u>DEMONSTR.</u>: Como $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$, dado $\varepsilon > 0$ qualquer tem-se que $\exists\ \delta > 0$ tal que, $\forall z \in D(f)$, tal que $0 < d(z, z_0) < \delta$, implica em

$$d(f(z), \alpha) < \varepsilon.$$

Ou seja,

$$|f(z)| - |\alpha| \leq |f(z) - \alpha| < \varepsilon,$$

PROPRIEDADE DOS MÓDULOS

isto é,
$$|f(z)| - |\alpha| < \varepsilon \implies |f(z)| < \underbrace{\varepsilon + |\alpha|}_{=: K}.$$

Denotando $K = \varepsilon + |\alpha|$; segue que

$$|f(z)| < K, \quad \forall z \text{ tal que } 0 < d(z, z_0) < \delta.$$

$\square$

PROPOSIÇÃO (PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DOS LIMITES)

Sejam $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções, com $z_0 \in \Omega'$.
Então, se $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$ e $\lim_{z \to z_0} g(z) = \beta$,

valem as seguintes propriedades aritméticas:

(a) $\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = \alpha + \beta$

(b) $\lim_{z \to z_0} (f(z) - g(z)) = \alpha - \beta$

(c) $\lim_{z \to z_0} f(z) . g(z) = \alpha . \beta$

(d) $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$; $(\beta \neq 0)$

A demonstração de todas estas propriedades seguem analogamente ao caso real.

$\square$

Def: Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função complexa

Definimos:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = a \in \mathbb{C}$$

se, e somente se,

$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0$ tal que, $\forall z \in \Omega : |z| > R \Rightarrow |f(z) - a| < \varepsilon$.

Ex-1 Prove que $\lim_{z \to \infty} \frac{i}{|z|^2} = 0$.

Solução: Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $R > 0$ tal que, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que
$|z| > R$, implique em $|f(z) - 0| < \varepsilon$.

Analisando $|f(z) - 0| = |f(z)|$:

$$|f(z)| = \left| \frac{i}{|z|^2} \right| = \left| \frac{0}{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2+y^2} i \right| =$$

$$= \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{|z|^2} < \varepsilon$$

Como queremos $|z| > R$, então; tome $R > 0$ tal que $R > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Assim:

$|f(z)| = \frac{1}{|z|^2}$, e como

$$|z| > R \Rightarrow |z|^2 > R^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z|^2} < \frac{1}{R^2} < (\cancel{\sqrt{\varepsilon}})^{\cancel{2}} = \varepsilon$$

$\frac{1}{R} < \sqrt{\varepsilon}$

Ou seja, $|f(z)| = \frac{1}{|z|^2} < \varepsilon$.

Def: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função complexa.
Então,
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \quad \text{se, e só se,}$$

$\forall R > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall z \in \Omega : 0 < |z - z_0| < \delta$
implique em $|f(z)| > R$.

EXERCÍCIO: Mostre que $\lim_{z \to -i} \dfrac{1}{z+i} = \infty$.

(ENTREGAR NA QUARTA)

CONTINUIDADE:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa, e $z_0 \in \Omega \cap \Omega'$. Dizemos que f é contínua em z_0 se, e só se,
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Ou ainda:

$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ se, e só se ;

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall z \in \Omega : |z - z_0| < \delta$,
implique em $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

PROPOSIÇÃO : Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função e $z_0 \in \Omega \cap \Omega'$. São equivalentes as afirmações:

(a) f é contínua em z_0 ;

(b) $\forall (z_n) \subset \Omega$ tal que $z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to f(z_0)$.

DEMONSTR.:

(a) $\Rightarrow$ (b) : Suponha f contínua em z_0.

Suponha também (z_n) seq. em Ω tal que $z_n \to z_0$.

Como f é cont. em z_0 , então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall z \in \Omega : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Como $z_n \to z_0$, por hipótese, então, para $\delta > 0$ acima, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implica em $|z_n - z_0| < \delta$. Então, pela continuidade da f segue que $|f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon$, sempre que $n \geq n_0$.

Ou seja, acabamos de mostrar que
$$f(z_n) \to f(z_0) \text{ ; provando (b).}$$

(b) $\Rightarrow$ (a): Suponha que $\forall\, (z_n) \subset \Omega$ tal que $z_n \to z_0$, implique em $f(z_n) \to f(z_0)$.

A mostrar: f é contínua em z_0.

Por absurdo, se f não for contínua em z_0; então, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tal que, $\forall \delta > 0$, $\exists\, z \in \Omega$ tal que,
$$|z - z_0| < \delta, \text{ mas } |f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $\delta_n = \frac{1}{n}$. Então,
$$\exists\, z_n \in \Omega \text{ tal que } |z_n - z_0| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(z_n) - f(z_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Logo, temos $z_n \to z_0$ mas $f(z_n) \not\to f(z_0)$, um absurdo com a hipótese.

Portanto, vale (a); ou seja, f é cont. em z_0. $\square$

Def.: Dizemos que $f: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio Ω.

PROP.: Sejam f, g funções complexas contínuas. Então, $f+g$; $f-g$; $f \cdot g$ e f/g são contínuas. (em seus domínios)

A Demonstr. segue análoga ao caso real.

$\square$

PROP.: Sejam $f: \Omega_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $g: \Omega_2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções complexas; tais que $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$; $a \in \Omega_1' \cap \Omega_2'$ (i.e., a é ponto de acumulação de Ω_1 e de Ω_2); f contínua em a e g contínua em $b = f(a)$. Então, $g \circ f: \Omega_1 \to \mathbb{C}$ é contínua em a.

DEMONSTR.: Seja $(z_n) \subset \Omega_1$ seq. tal que $z_n \to a$.

Como f é cont. em a, então por proposição anterior segue que $f(z_n) \to f(a)$; onde $(f(z_n))_n$ é uma seq. em Ω_2.

Do mesmo modo, sendo g cont. em $f(a)$, por hipótese, segue que

$$g(f(z_n)) \to g(f(a));$$

ou seja, $(g \circ f)(z_n) \to (g \circ f)(a)$; i.e., $g \circ f$ é cont. em a.

$\square$