RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DA LISTA 02, OS EXERCÍCIOS ENVOLVENDO A PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA.

1. Quais os pontos $P(x_1, x_2, x_3)$ sobre S^2 tais que $\varphi(P) = x_1 + x_2 i$ em $\mathbb{C}$? Ou seja, quais são os *pontos fixos* de φ? Interprete também geometricamente.

$$\varphi: S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$$

$$\varphi(u, v, w) = \frac{u}{1-w} + \frac{v}{1-w} i$$

Queremos saber quais são os pontos $P(x_1, x_2, x_3)$ tais que

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 i$$

Disso:

$$\frac{x_1}{1-x_3} + \frac{x_2}{1-x_3} i = x_1 + x_2 i$$

$$\iff \frac{x_1}{1-x_3} = x_1 \quad e \quad \frac{x_2}{1-x_3} = x_2$$

Sendo $x_1, x_2 \neq 0$; dividindo a 1ª igualdade acima por x_1 e a 2ª por x_2, obtemos, para ambos os casos,

$$\frac{1}{1-x_3} = 1 \iff \boxed{x_3 = 0}$$

Como $P(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$, devemos ter

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \ ;$$

E, para cumprir que $\varphi(P) = x_1 + x_2 i$;

observamos acima (para $x_1, x_2 \neq 0$), que $x_3 = 0$.

Disso:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Ou seja, sendo $(x_1, x_2) \neq (0,0)$; os pontos os quais

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 i \ ,$$

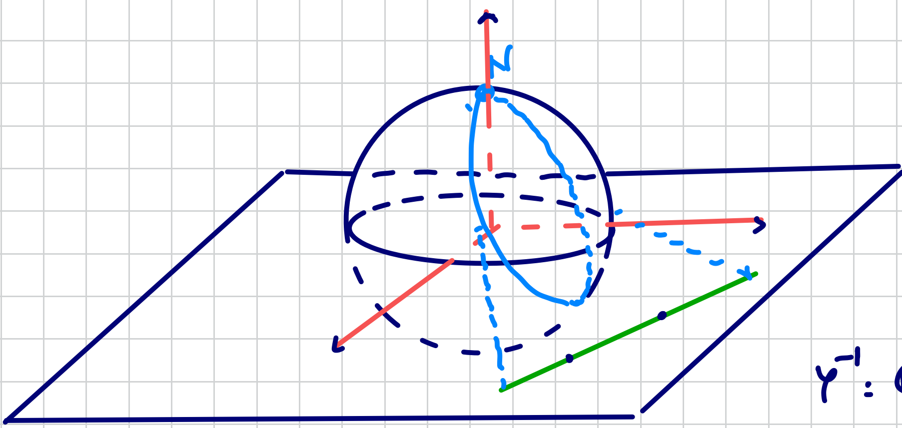
serão, no plano complexo $\mathbb{C}$, a circunferência $x_1^2 + x_2^2 = 1$; justamente, a interseção de $S^2 \setminus \{N\}$ com o plano $\mathbb{C}$ da projeção estereográfica.

Além disso, quando $(x_1, x_2) = (0,0)$, temos o ponto $Q(0,0,-1) \in S^2 \setminus \{N\}$ também é fixo, pois

$$\varphi(Q) = \varphi(0,0,-1) = \frac{0}{1-(-1)} + \frac{0}{1-(-1)} i$$

$$= 0 + 0i.$$

2. Do estudo de projeções estereográficas, mostre que a imagem por φ^{-1} de toda reta de $\mathbb{C}$ corresponde a uma circunferência em S^2, passando pelo pólo norte.



$\varphi^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$

$$\varphi^{-1}(\xi) = \left(\underbrace{\frac{\xi + \bar{\xi}}{|\xi|^2+1}}_{u} ; \underbrace{\frac{\bar{\xi} - \xi}{|\xi|^2+1} \cdot i}_{v} ; \underbrace{\frac{|\xi|^2-1}{|\xi|^2+1}}_{w} \right)$$

Seja $(r): ax+by+c=0$ a eq. da reta em $\mathbb{C}$.

Dado $z = x+iy \in (r) \subset \mathbb{C}$, pela φ;

teremos

$$x = \frac{u}{1-w} \quad e \quad y = \frac{v}{1-w}, \quad e$$

então:

$$a \cdot \left(\frac{u}{1-w}\right) + b\left(\frac{v}{1-w}\right) + c = 0 \qquad \times(1-w)$$

$$au + bv + c(1-w) = 0$$

$$(\pi): \boxed{au + bv - cw + c = 0}$$

$\hookrightarrow$ eq. de um plano que passa pelo pólo norte $N(0,0,1)$ e pela reta (r) no plano $\mathbb{C}$.

De fato, $N(0,0,1) \in (\pi)$ pois:

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 - c \cdot 1 + c = 0 \qquad (\text{OK!})$$

Da geometria sabemos que a interseção de um plano com uma esfera resulta numa circunferência, no nosso caso passando pelo pólo norte $N(0,0,1)$.

---

3. Prove que toda circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ corresponde por φ^{-1}, a uma circunferência em S^2.

Seja a circunf.

$$|z-\alpha| = R$$

centrada em $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2 i$ e raio $R > 0$.

Por φ^{-1}, temos

$$x = \frac{u}{1-w} \quad \text{e} \quad y = \frac{v}{1-w}$$

Assim,

$$|z-\alpha| = R \iff \sqrt{(x-\alpha_1)^2 + (y-\alpha_2)^2} = R$$

$$\iff \left(\frac{u}{1-w} - \alpha_1\right)^2 + \left(\frac{v}{1-w} - \alpha_2\right)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{(1-w)^2} - \frac{2u\cdot\alpha_1}{1-w} + \alpha_1^2 + \frac{v^2}{(1-w)^2} - \frac{2v\alpha_2}{(1-w)^2} + \alpha_2^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow u^2 + v^2 - 2(1-w)(u\alpha_1 + v\alpha_2) + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(1-w)^2 = R^2(1-w)^2.$$

$$\Leftrightarrow u^2 + v^2 - 2(1-w)\alpha_1\cdot u - 2(1-w)\alpha_2 v + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(1-w)^2 =$$
$$= R^2(1-w)^2$$

Escreva $C = -2(1-w)\alpha_1$

$D = -2(1-w)\alpha_2$

e $E = R^2(1-w)^2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(1-w)^2$;

então temos:

$$\boxed{u^2 + v^2 + C\cdot u + D\cdot v + E = 0}$$

A equação geral de uma circunferência pode ser representada pela eq. acima.

Mas, para garantirmos que de fato é, precisamos verificar se

$C^2 + D^2 - 4\cdot E > 0$ (LIVRO FUND. DA MAT. ELEMENTAR, VOL 7, POR EX.)

Fica como exercício verificar isso, para concluir o exercício.

---

4. Qual é a imagem em S^2 por φ^{-1} do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$?

Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} = \{x + yi : \sqrt{x^2+y^2} > 1\}$.

$$f^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\},$$

$$f^{-1}(\xi) = \left(\underbrace{\frac{\xi + \bar{\xi}}{|\xi|^2+1}}_{u} ; \underbrace{\frac{\bar{\xi} - \xi}{|\xi|^2+1} \cdot i}_{v} ; \underbrace{\frac{|\xi|^2 - 1}{|\xi|^2+1}}_{w} \right).$$

Sendo $\xi = a + bi$, de f^{-1} temos:

$$u = \frac{\xi + \bar{\xi}}{|\xi|^2+1} = \frac{2a}{a^2+b^2+1} < \frac{2a}{1+1} = a$$

$$v = \frac{-2bi}{a^2+b^2+1} \cdot i = \frac{2b}{a^2+b^2+1} < \frac{2b}{1+1} = b$$

$$w = \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1} = \frac{a^2+b^2+1}{a^2+b^2+1} - \frac{2}{a^2+b^2+1} =$$

$$= 1 - \frac{2}{a^2+b^2+1} > 1 - \frac{2}{2} > 0$$

Serão pontos $P(u, v, w)$; com

$u < a$; $v < b$ e $w > 0$

Como $a, b \in \mathbb{R}$, as desigualdades $u < a$ e $v < b$ não nos dizem nada. No entanto, a desigualdade $w > 0$ estabelece que serão pontos $P(u, v, w)$ em $S^2 \setminus \{N\}$. tais que $w > 0$, ou seja, é a semi-esfera superior.

E, em S^2, incluiremos o pólo norte.