

VARIÁVEIS COMPLEXAS

04/06/25 - AULA 11

No final da aula passada estudamos as funções trigonométricas complexas $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$;

$$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$g(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Analogamente ao caso real, podemos definir as demais funções trigonométricas complexas; como por exemplo;

$$f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z};$$

e esta tem sentido $\forall z \in \mathbb{C}$, pois $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$;
e o numerador sempre $e^i \neq 0$.

Proposição: As funções $\sin z$, $\cos z$ e $\tan z$ acima definidos são periódicas; onde o período de $\sin z$ e $\cos z$ é 2π e de $\tan z$ é π .

DEMONSTRAÇÃO: Provemos a fórmula para $f(z) = \cos z$:

$\forall z \in \mathbb{C}$; temos:

$$\begin{aligned}\underline{f(z+2\pi)} &= \cos(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \\&= \frac{e^{iz} \cdot \underbrace{e^{2\pi i}}_{=1} + e^{-iz} \cdot \underbrace{e^{-2\pi i}}_{=1}}{2} = \\&= \frac{e^{iz} \cdot (\underbrace{\cos 2\pi}_{=1} + i \underbrace{\sin 2\pi}_{=0}) + e^{-iz} \cdot (\underbrace{\cos 2\pi}_{=1} - i \underbrace{\sin 2\pi}_{=0})}{2} \\&= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z = \underline{f(z)}.\end{aligned}$$

□

EXERCÍCIO: Encontre todos os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que $\cos z = 2$

SOLUÇÃO:

$$\begin{aligned}\cos z &= 2 \\ \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} &= 2 \\ e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} &= 4 \\ e^{2iz} + 1 &= 4e^{iz}\end{aligned}$$

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$$

Em vez $\boxed{e^{iz} = w}$

Assim, temos:

$$w^2 - 4w + 1 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{w = 2 + \sqrt{3}} \\ \text{or} \\ \underline{w = 2 - \sqrt{3}} \end{array} \right.$$

$$w = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$$

$$w = \frac{4 \pm \sqrt{3 \cdot 4}}{2}$$

Volviendo à nome nel z :

$$e^{iz} = w. \quad ; \text{ sendo } z = x + iy \quad ; \text{ tem-se:}$$

$$e^{i(x+iy)} = w$$

$$e^{ix} \cdot e^{-y} = w$$

$$\underline{\underline{1.º: w = 2 + \sqrt{3}}}: \quad e^{ix} \cdot e^{-y} = 2 + \sqrt{3}$$

$$e^{-y} \cdot (\cos x + i \sin x) = 2 + \sqrt{3} + 0i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-y} \cos x = 2 + \sqrt{3} \\ \underbrace{e^{-y}}_{\neq 0} \cdot \sin x = 0 \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Dimo, teorema:

$$e^{-y} \cdot \cos x = 2 + \sqrt{3}$$

$$e^{-y} \cdot \underbrace{\cos(k\pi)}_{1 \text{ ou } -1} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos k\pi = 1 \text{ (k e' par):} \\ e^{-y} = 2 + \sqrt{3} \\ \ln e^{-y} = \ln(2 + \sqrt{3}) \\ \Rightarrow -y = \ln(2 + \sqrt{3}) \\ y = -\ln(2 + \sqrt{3}) \\ y = \ln(2 - \sqrt{3}) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$
$$\cos k\pi = -1 \text{ (k i'mpar)}$$

$$e^{-y} \cdot (-1) = 2 + \sqrt{3}$$

$$\underbrace{e^{-y}}_{>0} = \underbrace{-2 - \sqrt{3}}_{<0} \quad \text{Absurdo!}$$

Dimo: $z = x + iy = k\pi + i \cdot \ln(2 - \sqrt{3})$; k par.

$$\Leftrightarrow \boxed{z = 2k\pi + i \cdot \ln(2 - \sqrt{3}), \forall k \in \mathbb{Z}.}$$

2.º: $w = 2 - \sqrt{3}$: neste caso, teorema:

$$e^{ix} \cdot e^{-y} = 2 - \sqrt{3}$$

$$e^{-y} (\cos x + i \sin x) = 2 - \sqrt{3} + 0i$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{-y} \cdot \cos x = 2 - \sqrt{3} \\ \underbrace{e^{-y} \cdot \sin x}_{\neq 0} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, temos:

$$e^{-y} \cdot \underbrace{\cos k\pi}_{+1 \text{ ou } -1} = 2 - \sqrt{3}$$

k e' par: $\cos k\pi = 1$;

$$e^{-y} \cdot 1 = 2 - \sqrt{3}$$

$$y = \ln(2 + \sqrt{3})$$

k e' impar: $\cos k\pi = -1$.

$$e^{-y} \cdot (-1) = 2 - \sqrt{3}$$

$$e^{-y} = \frac{-2 + \sqrt{3}}{>0} < 0$$

Absurdo!

conclusão deste caso:

$$z = x + i \cdot y = k\pi + i \cdot \ln(2 + \sqrt{3}); \quad \forall k \text{ par}$$

$$\Leftrightarrow z = 2k\pi + i \cdot \ln(2 + \sqrt{3}), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Solução:

$$z = 2k\pi + i \cdot \ln(2 \pm \sqrt{3}); \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS COMPLEXAS:

são extensões das hiperbólicas reais.

Definimos as funções hiperbólicas complexas

$f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, por:

$$f(z) = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$g(z) = \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Do mesmo modo definem-se as demais funções hiperbólicas complexas. Por exemplo:

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

Também valem propriedades análogas ao caso real. Por exemplo, temos válida a relação hiperbólica fundamental:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

Fica como exercício a sua demonstração.

PROPOSIÇÃO: As funções $\sinh z$ e $\cosh z$ são periódicas de período $2\pi i$. A função $\tanh z$ também é periódica, mas com períodos πi .

DEMONSTRE: Faremos apenas para o $\sinh z$:

$$\begin{aligned}\sinh(z + 2\pi i) &= \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-(z+2\pi i)}}{2} = \\&= \frac{e^z \cdot e^{2\pi i} - e^{-z} \cdot e^{-2\pi i}}{2} = \\&= \frac{e^z \cdot (\overset{=1}{\cos 2\pi} + i \overset{=0}{\sin 2\pi}) - e^{-z} (\overset{=1}{\cos 2\pi} - i \overset{=0}{\sin 2\pi})}{2} \\&= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z.\end{aligned}$$

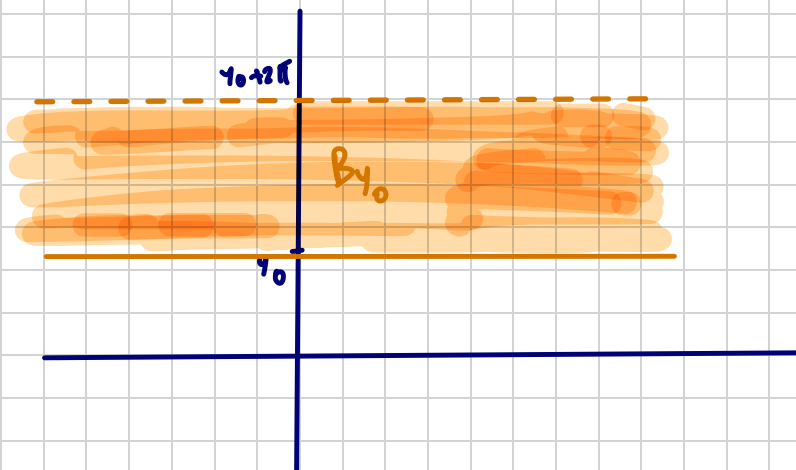
Mais adiante estudaremos as trigonometrias e hiperbólicas inversas. □

FUNÇÃO LOGARÍTMICA COMPLEXA.

Não que segue vamos procurar obter uma função que desempenhe o papel de inversa da função exponencial $f(z) = e^z$. Porém, como a exponencial é periódica de período $2\pi i$, precisamos restringir o seu domínio de modo a permitir a obtenção de uma inversa.

Para isto, tome $y_0 \in \mathbb{R}$ qualquer, fixado, e defina o conjunto

$$B_{y_0} = \{ x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R} \text{ e } y_0 \leq y < y_0 + 2\pi \}.$$



Proposição: A função $f: B_0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada
por $f(z) = e^z$ é bijetiva.

Demonstr.: Vamos mostrar que f é injetiva e
sobrejetiva.

AF-01: f é injetiva: Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Se $f(z_1) = f(z_2)$, precisamos mostrar que $z_1 = z_2$;
onde $z_1 = x_1 + i y_1$ e $z_2 = x_2 + i y_2$.

De fato:

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow e^{z_1} = e^{z_2} = e^{z_1} \cdot e^{-z_2} = e^{z_1 - z_2}$$

$$\Rightarrow e^{z_1 - z_2} = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow e^{z_1 - z_2} = 1 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow x_1 + i y_1 - (x_2 + i y_2) = 2k\pi i$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = 0 + 2k\pi i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ y_1 - y_2 = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

e como $\gamma_1, \gamma_2 \in [\gamma_0, \gamma_0 + 2\pi)$; então

$$\gamma_1 - \gamma_2 < 2\pi \quad (\text{ou seja, } k=0);$$

$$\text{i.e.; } \gamma_1 = \gamma_2$$

$$\text{conclusão: } z_1 = r_1 + i\gamma_1 = r_2 + i\gamma_2 = z_2;$$

o que mostra que $f(z) = e^z$ é injetiva em B_γ .

AF-02: f é sobrejetiva: Dado $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

precisamos encontrar $z \in B_\gamma$ tal que $f(z) = w$

Ou seja, tal que $e^z = w$.



$$e^{x+iy} = w$$

$$e^x \cdot e^{iy} = w$$

Note que, pensando na notação polar, tem-se

$$\boxed{e^x = |w|}; \text{ e então } |w| \cdot e^{iy} = w, \text{ ou seja,}$$

(*)

$$e^{iy} = \frac{w}{|w|}$$

(por isso exige-se que $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Relembrando;

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y;$$

então γ pode assumir qualquer valor devido à periodicidade do seno e do cosseno. Então, podemos tomar aquele que esteja no intervalo $[y_0, y_0 + 2\pi)$, digamos $\tilde{y}$ (existe).

$$\text{Além disso, em (*) : } e^x = |w| \text{ (real)} \\ \Downarrow \\ x = \ln |w|.$$

Assim, $z = x + iy = \ln |w| + i\tilde{y} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e tal que, por construção $e^z = w$; i.e., f é sobrejetiva.

Portanto, f é bijetiva.

□

A função Log:

De posse da prop. acima, sendo $e^z = w$, escrevendo $z = x + iy$ e $w = s + it$, temos:

$$e^{x+iy} = s + it$$

$$e^x \cdot e^{iy} = 1 + it$$

$$e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = 1 + it$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x \cdot \cos y = 1 \\ e^x \cdot \sin y = t \end{cases}$$

Elevando ao quadrado e somando, obtemos:

$$e^{2x} \cdot \cos^2 y + e^{2x} \cdot \sin^2 y = 1^2 + t^2$$

$$e^{2x} \cdot (\underbrace{\cos^2 y + \sin^2 y}_{=1}) = 1^2 + t^2$$

$$e^{2x} = 1^2 + t^2 \Rightarrow e^x = \sqrt{1^2 + t^2}$$

$$\Rightarrow e^x = |w| \quad (\mathbb{R})$$



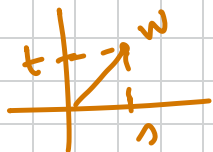
$$\ln e^x = \ln |w|$$

$$\boxed{x = \ln |w|}$$

Aleim disso;

$$\tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{e^x \cdot \sin y}{e^x \cdot \cos y} = \frac{t}{1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{y}_{\approx \arg w} = \underbrace{\arctan\left(\frac{t}{1}\right)}_{\approx \arg w} + 2k\pi = \arg w + 2k\pi$$



Assim: $e^z = w$; se aplicarmos o logaritmo como no caso real, obtemos:

$$\begin{aligned} z &= \ln w \\ \downarrow \\ x+iy & \\ \downarrow \\ \ln|w| + i \cdot (\arg w + 2k\pi) \end{aligned}$$

ou seja, obtemos:

$$\ln w = \ln|w| + i \cdot (\arg w + 2k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Isto inspira definir o logaritmo complexo:

Def: Definimos a função $\log: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\log z = \ln|z| + i \cdot (\arg z + 2k\pi); \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Note que $\log z$ é uma função plurívoca, pois para um dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, há infinitos valores para $\log z$, c.f. variarmos $k \in \mathbb{Z}$.

Quando $k=0$, teremos

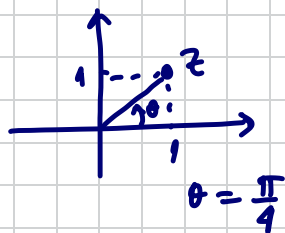
$$\log z = \ln |z| + i \cdot \arg z,$$

e este valor chama-se valor principal do logaritmo

Ex: Calcule $\text{Log}(1+i)$.

solução:

$$z = 1+i$$



$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Assim: } \text{Log}(1+i) = \ln |1+i| + i \cdot (\arg(1+i) + 2k\pi)$$

$$= \ln \sqrt{2} + i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 + i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$$

$$\Rightarrow \text{Log}(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{O valor principal será: } \text{Log}(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} i$$

$\log: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ é plurívoca.

Podemos torná-la unívoca se considerarmos um corte no plano complexo que exclua a origem. A ideia consiste em tomar diferentes regiões de γ_0 até $\gamma_0 + 2\pi$ (lembrar que a função $f(z) = e^z$ é bijetiva em B_γ)

