

DERIVAÇÃO COMPLEXA:

Def: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de variável complexa definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$, e seja $a \in \Omega$.

Dizemos que f é derivável no ponto a se existir o limite:

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Escrevendo $h = z - a \in \mathbb{C}$, temos $z = a + h$

Disso, tem-se que $h \rightarrow 0$; e daí podemos

escrever:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ex: Fixado $n \in \mathbb{N}$, seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$;

$f(z) = z^n$. Vamos calcular $f'(a)$, para $a \in \mathbb{C}$.

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^n - a^n}{z - a};$$

e como

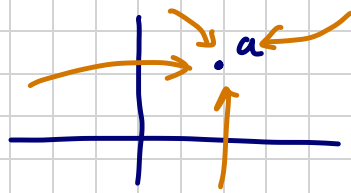
$$z^n - a^n = (z - a) \cdot \underbrace{(z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1})}_{n \text{ adições}};$$

segue que

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{\cancel{(z-a)} (z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1})}{\cancel{z-a}} \\ &= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-2}a + \dots + a^{n-1}}_{n \text{ adições}} = \underbrace{na^{n-1}} \end{aligned}$$

obs: Note que $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função que, de maneira geral, leva região para região, então, se $\exists f'(a)$; significa que $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ resulta sempre no

mesmo valor complexo, independente de como $z \rightarrow a$ (ou seja, por qual caminho)



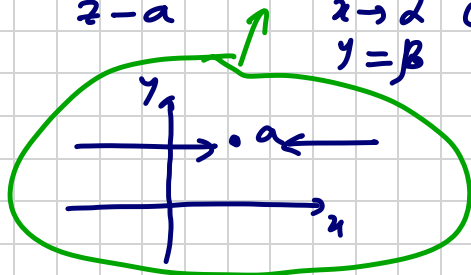
Ex: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; f(z) = \operatorname{Re}(z) = x$.

Dado $a \in \mathbb{C}; \exists f'(a)$?

Note que; sendo $a = \alpha + i\beta$;

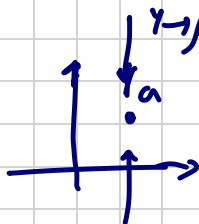
temos:

$$\bullet \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} \frac{x - \alpha}{(x + iy) - (\alpha + i\beta)} =$$



$$= \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} \frac{x - \alpha}{x + i\cancel{\beta} - \alpha - i\cancel{\beta}} = \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} \frac{x - \alpha}{x - \alpha} = 1$$

$$\bullet \lim_{\substack{x = \alpha \\ y \rightarrow \beta}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{\substack{x = \alpha \\ y \rightarrow \beta}} \frac{x - \alpha}{x + iy - \alpha - i\beta} =$$



$$= \lim_{\substack{x = \alpha \\ y \rightarrow \beta}} \frac{\overset{=0}{\alpha - \alpha}}{i(y - \beta)} = 0.$$

ou seja; $\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = 1$, e

$$\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = 0$$

> (7)

Portanto, $\nexists f'(a)$; $\forall a \in \mathbb{C}$.

Torém definindo $g = f|_{\mathbb{R}}$; e neste caso, $g'(a) = 1$. (caso real)

PROPOSIÇÃO: Se $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é derivável em um ponto $z_0 \in \Omega$, então f é contínua nesse ponto z_0 .

DEMONSTRAÇÃO: De fato, basta observar que:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

$f'(z_0)$ $= 0$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) = 0 \quad ; \quad \text{ou seja,}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad ; \quad \text{i.e.}$$

f é contínua no ponto z_0 .

Def: Dizemos que uma função $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfe no aberto Ω se for derivável em todos os pontos de Ω .

Dizemos que f é holomorfe em um ponto z_0 se for localmente holomorfe neste ponto; ou seja, se existir uma vizinhança de z_0 na qual f seja derivável em todos os pontos dessa vizinhança.

Para compreender a utilidade dessa definição, vejamos um interessante exemplo:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

AF01: $\exists f'(0)$.

De fato:

$$\underline{f'(0)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2 - 0}{z}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cancel{z} \cdot \bar{z}}{\cancel{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\exists f'(0) = 0}$$

AF02: f não é holomorfa em z_0 , $\forall z_0 \neq 0$.

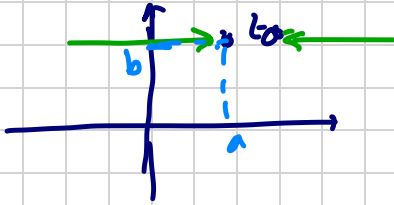
Seja $z_0 \neq 0$; digamos $z_0 = a + ib$. Então:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|x + iy|^2 - |a + ib|^2}{x + iy - (a + ib)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}{(x - a) + i(y - b)}.$$

Demo, segue que:

1.º:

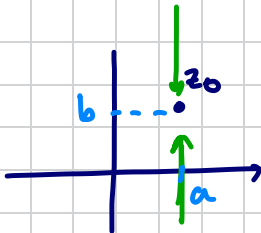


$$\bullet \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}{(x-a) + i \cdot (y-b)}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{x^2 + \cancel{y^2} - a^2 - \cancel{y^2}}{(x-a) + i \cdot (\underbrace{b-b}_{=0})} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = 2a$$

2.º:



$$\bullet \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} =$$

$$= \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}{(x-a) + i \cdot (y-b)} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{\cancel{a^2} + y^2 - \cancel{a^2} - b^2}{(\underbrace{a-a}_{=0}) + i \cdot (y-b)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{y^2 - b^2}{i \cdot (y-b)} =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow a \\ \lambda \rightarrow b}} \frac{(\cancel{\lambda-b})(\lambda+b)}{1 \cdot (\cancel{\lambda-b})} = \frac{2b}{1}$$

$$\text{Então, } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \begin{cases} 2a; & \text{se } \lambda = b \text{ e } \lambda \rightarrow a \\ \frac{2b}{1}; & \text{se } \lambda = a \text{ e } \lambda \rightarrow b. \end{cases}$$

Ou seja, $\nexists f'(z_0)$, $\forall z_0 \neq 0$; logo, f não é derivável em nenhuma vizinhança da origem 0.

conclusão: f é derivável em 0; com $f'(0) = 0$;
mas f não é holomorfe em 0.

Dada $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função derivável em $a \in \Omega$; definimos o número complexo $r(h)$ por: ($h \in \mathbb{C}$)

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h.$$

Note que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{= f'(a)} - \frac{f'(a) \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = f'(a) - f'(a) = 0$$

Isto posto, podemos definir, de forma alternativa, a derivada num ponto a por:

Def: Dizemos que $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é derivável em $a \in \Omega$ (Ω - aberto de $\mathbb{C}$), se existir $f'(a) \in \mathbb{C}$ tal que,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h),$$

$$\text{tem-se que } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

(Obs.: Este conceito é inspirado da def. de derivada no caso real, como uma aproximação linear).

Este conceito ajuda a provar o importante teorema:

TEOREMA: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa definida no aberto Ω ; dada por

$$f(z) = u + i \cdot v,$$

onde u e v possuem derivadas parciais contínuas. Então, f é derivável em $a \in \Omega$ se, e somente se, satisfizer as igualdades:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y}(a) = - \frac{\partial v}{\partial x}(a) ;$$

conhecidas como equações de CAUCHY-RIEMANN.

DEMONSTRAR: f é derivável em $a \Leftrightarrow \exists f'(a) = \alpha + i\beta$

e isto u , e isto v

$$f(a+h) = f(a) + \underline{f'(a) \cdot h} + o(h); \quad \text{com}$$

$$\frac{o(h)}{h} \rightarrow 0 \quad (h \in \mathbb{C})$$
$$h \rightarrow 0$$

Escreva $h = h_1 + i \cdot h_2$. Assim, temos:

$$f'(a) \cdot h = (\alpha + i\beta) \cdot (h_1 + i \cdot h_2) = (\alpha \cdot h_1 - \beta \cdot h_2, \alpha \cdot h_2 + \beta \cdot h_1)$$

Como $\zeta \sim \mathbb{R}^2$,

$x + yi \xrightarrow[\text{norm.}]{\text{bij.}} (x, y)$

podemos identificar $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\tilde{f}: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2;$$

$$\tilde{f}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

Assim; dado $a = x_0 + i \cdot y_0 \in \Omega$; ($\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$)

o mesmo fica identificado por $a(x_0, y_0) \in \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$

Assim, f é derivável em $a = x_0 + i \cdot y_0$



$\tilde{f}$ é derivável em $a(x_0, y_0)$.



$$\tilde{f}(a + \tilde{h}) = \tilde{f}(a) + \tilde{f}'(a) \cdot \tilde{h} + r(\tilde{h})$$

(em $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$)



APROX. LINEAR DE TAYLOR
NO $\mathbb{R}^2$

$\tilde{h} = (h_1, h_2)$

onde $\tilde{f}'(a)$ é a matriz jacobiana dos derivados parciais de $\tilde{f}$; ou seja; sendo

$$\tilde{f}(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) ; \text{ então}$$

$$\tilde{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} ; \text{ com}$$

estas derivadas parciais contínuas.

Por outro lado, via isomorfismo, tem-se

$$f'(a) \cdot h = (\alpha h_1, -\beta h_2, \alpha h_2 + \beta h_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} ;$$

ou seja; tem-se;

$$f(a+h) = f(a) + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + r(h)$$

pelo isomorfismo; $f'(a) = \tilde{f}'(a)$;

$i \cdot e;$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (a)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\partial u}{\partial x} (a) = \frac{\partial v}{\partial y} (a)$$

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial x} (a) = -\frac{\partial u}{\partial y} (a).$$

□



corolário: Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é derivável em a ,
então

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x} (a) + i \frac{\partial u}{\partial y} (a)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} (a) + i \frac{\partial v}{\partial x} (a)$$

DEMONSTRA: De fato, basta observar que, c.f.
a demonstração anterior:

$$f'(a) = \alpha + i\beta = \frac{\partial u}{\partial x} + i \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

□