

Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 de Exercícios - Limite e continuidade em $\mathbb{C}$

1. Prove os limites a seguir:

$$(a) \lim_{z \rightarrow -3i} (z^2 - 5z) = -9 + 15i \quad (b) \lim_{z \rightarrow i} \frac{4z + i}{z + 1} = \frac{5i}{1 + i} \quad (c) \lim_{z \rightarrow i} \frac{7}{z^2 + 1} = \infty$$

2. Sejam $c_j \in \mathbb{C}$ e $f_j : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ e z_0 ponto de acumulação de Ω , prove, por indução matemática, que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{j=1}^n c_j f_j(z) = \sum_{j=1}^n c_j \lim_{z \rightarrow z_0} f_j(z).$$

3. Calcule $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Re z}{1 + |z|}$.

4. Verifique se as funções complexas $f(z) = \frac{\Im z^2}{|z|}$ e $g(z) = \frac{\Re z}{|z|}$, ambas com $z \neq 0$ possuem limite no ponto $z = 0$.

5. Prove que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{i}{z + i} = 0$.

6. Mostre que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ não existe.

7. Calcule os limites complexos:

$$(a) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^6 + 1} \quad (b) \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - z + 1 - i}{z^2 - 2z + 2} \quad (c) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+z} - 1}{z}$$

8. Prove que, se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha$, então $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |\alpha|$.

9. Prove que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha$ se, e somente se, a sequência $(f(z_n))$ converge para α para toda sequência (z_n) tal que $z_n \rightarrow \alpha$.

10. Se $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \alpha$ e suponha que $f(z)$ esteja definida para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \alpha$. Usando $f(z) = \sin \pi z$, justifique que a recíproca é falsa.

11. Prove que se $f(z) \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow z_0$ e $|g(z)| > c > 0$ numa vizinhança de z_0 , então $f(z)g(z) \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow z_0$.

12. Verifique se as funções $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ abaixo são contínuas no ponto z_0 indicado:

$$(a) f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & \text{se } z \neq 0 \\ 1, & \text{se } z = 0 \end{cases} \quad \text{no ponto } z_0 = 0$$

$$(b) f(z) = \begin{cases} \frac{z\Re z}{|z|}, & \text{se } z \neq 0 \\ 1, & \text{se } z = 0 \end{cases} \quad \text{no ponto } z_0 = 0$$

$$(c) f(z) = \begin{cases} \frac{z^3-1}{z^2+z+1}, & \text{se } |z| \neq 1 \\ 3, & \text{se } z = 0 \end{cases} \quad \text{no ponto } z_0 = 1$$

13. Mostre que a função $f(z) = \bar{z}$ é contínua em todo o plano complexo.

14. Prove que $f(z) = \sqrt{z}$ é contínua em todo $z \in \mathbb{C}$.