

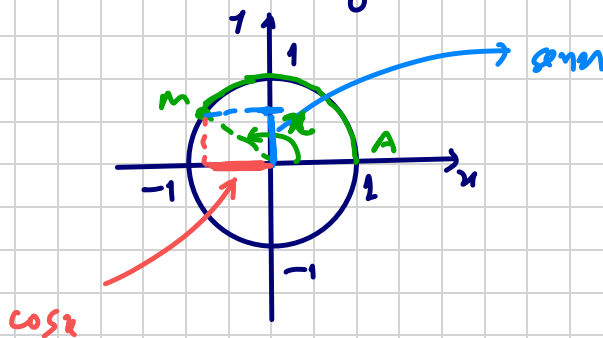
FUNÇÕES TRANSCENDENTES

18/06/25 - AULA 08

Na aula passada estudamos os números trigonométricos $\cot x$, $\sec x$ e $\csc x$.

Uma observação importante com respeito à secante a é consecante:

Note que $\sin x$ varia entre -1 e 1 .
E $\cos x$ também (por estarem representados no interior da ciclo trigonométrica)



Ou seja, $\forall x \in \mathbb{R}$ (x um arco em radianos),
tem-se $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$

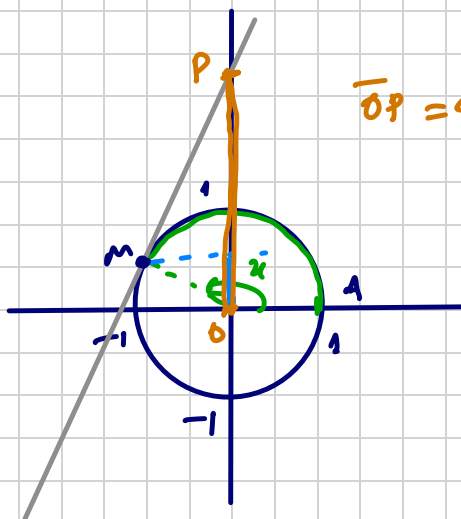
$$\downarrow$$
$$\sin x \leq 1 \text{ e } \sin x \geq -1$$

Somente os inversos, deves:

$$\frac{1}{\sin x} \geq 1 \text{ ou } \frac{1}{\sin x} \leq -1 ;$$

i.e.;

$$\csc x \geq 1 \text{ ou } \csc x \leq -1.$$



$\overline{OP} = \csc x > 1$ nesta ilustração.

O mesmo vale para $\sec x$; ou seja, sempre tem -se $\sec x \geq 1$ ou $\sec x \leq -1$.

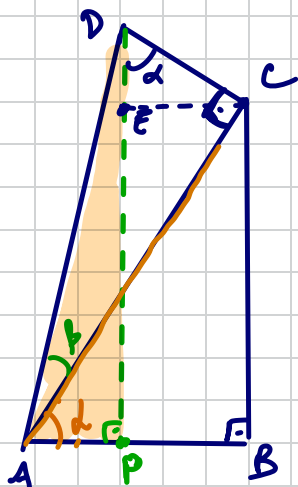
FÓRMULAS DA ADIÇÃO DE ARCOS:

PROT.: Dados α, β arcos, tem-se:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

DEMONSTRA: Mostremos para α, β entre $0, \frac{\pi}{2}$;
mas a fórmula pode ser ampliado $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Considere os triângulos ABC e ACD conforme o esquema, retângulos, retos em B e em C, respectivamente.



O triângulo APD destacado é retângulo, reto em P.

Disso, c.f. destacado, temos:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\overline{PD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{PE} + \overline{ED}}{\overline{AD}}$$

$$= \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} =$$

$$= \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DC}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}}_{\sin \alpha} \cdot \underbrace{\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}}_{\cos \beta} + \underbrace{\frac{\overline{ED}}{\overline{DC}}}_{\cos \alpha} \cdot \underbrace{\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}}_{\sin \beta}$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}$$

2, quando α, β são maiores do que $\frac{\pi}{2}$ rad, a fórmula continua válida devido à simetria e redução ao 1º q.

Ex Calcule $\sin 75^\circ$.

Solução:

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$$

Exemplo "ARTIFICIAL"

$$\begin{aligned} \sin 90^\circ &= \sin(45^\circ + 45^\circ) = \\ &= \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}. \end{aligned}$$

Outros resultados:

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \\ &= \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cdot \cos \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + (-\sin \beta) \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha}$$



Ex. 11 $\sin 15^\circ = ?$ $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

EXERCÍCIO Dadas x, y arcos do 1º quadrante,

tais que $x + y = 135^\circ$. Se $\cos x = \frac{2}{3}$,
determine $\sin y$.

SOLUÇÃO: De $x + y = 135^\circ$; escreveremos:

$$y = 135^\circ - x.$$

$$\Rightarrow \underline{\sin y} = \sin(135^\circ - x) =$$

$$= \sin 135^\circ \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 135^\circ ;$$

$\underbrace{\sin 135^\circ}_{= \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\text{onde } \sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \underbrace{\sin 90^\circ}_{=1} \cdot \underbrace{\cos 45^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \cancel{\sin 45^\circ \cdot \cos 90^\circ}_{=0}$$

$$= 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ou, posteriormente, neste caso, reduzir ao 1º q:

$$\sin 135^\circ = + \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\underbrace{\sin 135^\circ}_{\leftarrow 2^\circ \text{q}}$

e

$$\cos \underbrace{135^\circ}_{\leftarrow 2^\circ \text{q}} = - \cos(180^\circ - 135^\circ) = - \cos 45^\circ = - \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Então, como temos por hipótese que $\cos x = \frac{2}{3}$,
obtemos:

$$\operatorname{sen} \gamma = \underbrace{\operatorname{sen} 135^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\frac{2}{3}} + \underbrace{\operatorname{sen} x}_{?} \cdot \underbrace{\cos 135^\circ}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (*)$$

nó resta obter $\operatorname{sen} x$; $x \in [1; 9]$.

Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$,

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\operatorname{sen} x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$x \in [1; 9]$.

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9-4}{9}}$$

$$\operatorname{sen} x = +\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (x \in [1; 9])$$

Portanto, obtendo de (*):

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{10}}{6}$$

PROP.: Valem as fórmulas para o cosseno:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

DEMONSTRA. Basta observar que:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \\ &= \sin((90^\circ - \alpha) - \beta) = \\ &= \underbrace{\sin(90^\circ - \alpha)}_{=\cos \alpha} \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \underbrace{\cos(90^\circ - \alpha)}_{=\sin \alpha} \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

Do mesmo modo mostra-se a outra, fazendo:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) = \\ &= \sin(\underbrace{(90^\circ - \alpha)} + \beta) \end{aligned}$$

□

Ex: Calcule $\cos 15^\circ$.

Solução:

$$\cos 15^\circ = \cos (60^\circ - 45^\circ) =$$

$$= \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} //$$

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS:

LISTA 02

21. Considere um polígono regular de n lados com medida de cada lado igual a ℓ , inscrito numa circunferência de raio R . Da Geometria sabemos que, se traçarmos todas as diagonais desse polígono, formaremos n triângulos isósceles.

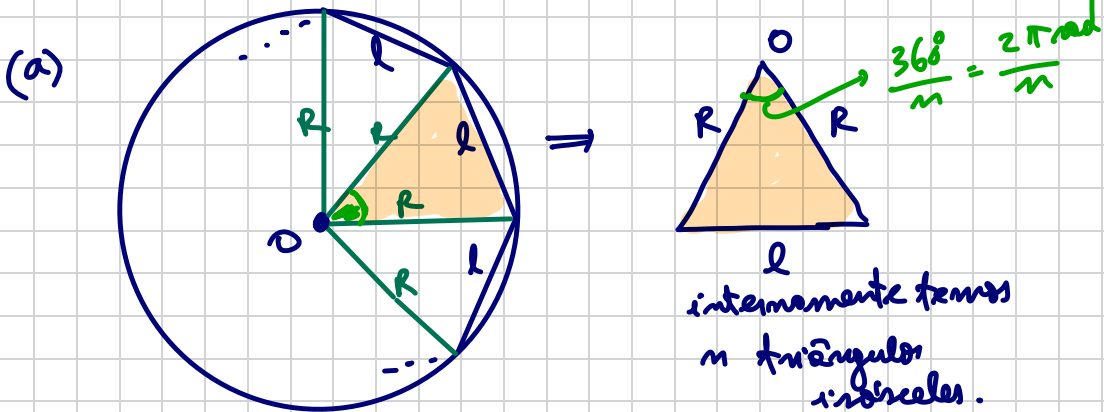
(a) Destacando um desses triângulos isósceles do polígono regular, considerando o vértice onde está o centro da circunferência, conclua que a medida de seu ângulo interno, em radianos, é dada por $\frac{2\pi}{n}$.

(b) Mostre que a área A_n do polígono regular de n lados pode ser determinada pela fórmula

$$A_n = \frac{n \cdot \ell^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

(c) Usando a fórmula acima, encontre as fórmulas para determinar a área de um quadrado de lado ℓ , de um triângulo equilátero de lado ℓ e de um hexágono regular de lado ℓ .

(d) Considerando que $\cos 36^\circ = \frac{\varphi}{2}$, onde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro, determine uma fórmula para calcular a área de um pentágono regular.

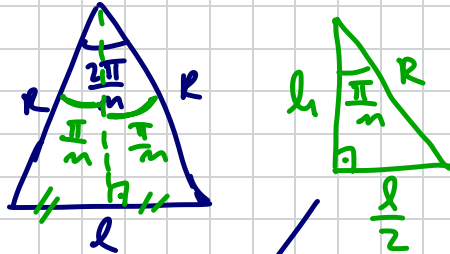


De fato, tem-se ao todo 360°
que deverão ser divididos pelo vértice O , por
 n , então, teremos $\frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n} \text{ (rad)}$

(b) a área A do polígono será

$$A = n \cdot A_3 ; \text{ onde}$$

A_3 é a área do triângulo isósceles:



pelo T. de Pitágoras :

$$R^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = R^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{l}{2}}{h}$$

$$h = \frac{\frac{l}{2}}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$h = \frac{l}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Assim, a medida da área será:

$$\underline{A} = n \cdot A_3 = n \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

$$= n \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$= \frac{n l^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

(c) QUADRADO: $n=4$. Neste caso:

$$A = \frac{4 \cdot l^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{l^2}{\tan 45^\circ} = \frac{l^2}{1} = l^2$$

TRIÂNGULO EQUILÁTERO: $n=3$

$$A = \frac{3 \cdot l^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3 \cdot l^2}{4 \cdot \tan 60^\circ} =$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad.} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$= \frac{3 l^2}{4 \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\cancel{3} \sqrt{3} l^2}{12 \cancel{4}} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

HEXÁGONO: $n=6$.

$$A = \frac{6 l^2}{6 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{3 l^2}{2 \cdot \tan 30^\circ} = \frac{3 l^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= 3l^2 \times \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{9l^2}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\overset{3}{\cancel{9}} l^2 \sqrt{3}}{2 \cdot \cancel{3}} = \underline{\underline{\frac{3l^2 \sqrt{3}}{2}}}$$

d) $\cos 36^\circ = \frac{p}{2}$, onde $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

área do pentágono: $n=5$

$$A = \frac{5 \cdot l^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{5l^2}{4 \cdot \tan 36^\circ}$$

$\frac{\pi}{5} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$$

No novo caso:

$$\sin 36^\circ = + \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

1º q

$$= \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 - p^2}}{2}$$

$$\text{Assim: } \tan 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{4-b^2}}{2}}{\frac{b}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan 36^\circ = \frac{\sqrt{4-b^2}}{b}$$

Assim, obtenemos a área do pentágono real:

$$\underbrace{A} = \frac{5l^2}{4 \cdot \tan 36^\circ} = \frac{5l^2}{4 \cdot \frac{\sqrt{4-b^2}}{b}} =$$

$$= \frac{5bl^2}{4\sqrt{4-b^2}}$$

L2

16. Converta para graus:

(a) $\frac{\pi}{5}$ rad

(b) $\frac{5\pi}{3}$ rad

(c) 1 rad

(d) 1,2 rad

(c)

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & \times & \pi \text{ rad.} \\ x & \text{---} & 1 \text{ rad} \end{array}$$

$$\pi \cdot x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{\pi}$$

L2

18. Calcule o valor numérico das expressões:

$$(a) y = \frac{4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4}}{\tan^2 \frac{\pi}{6} - 1}$$

$$(b) y = \frac{\sin \frac{7\pi}{4} + \tan \frac{3\pi}{4}}{2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \tan 6\pi}$$

$$(b) \quad \frac{7\pi}{4} = 7 \cdot \frac{\pi}{4} = 7 \cdot 45^\circ = 315^\circ$$

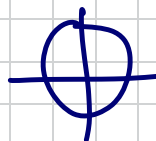
$$\frac{3\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\pi}{4} = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$6\pi = 1080^\circ$$

$$\downarrow$$

$$0$$



$$y = \frac{\sin 315^\circ + \tan 135^\circ}{2 \cdot \cos 60^\circ - \tan 0^\circ} ;$$

$$\text{onde: } \bullet \sin \underbrace{315^\circ}_{4.9q} = -\sin(360^\circ - 315^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \tan \underbrace{135^\circ}_{2.9q} = -\tan(180^\circ - 135^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$



$$\bullet \cos 60^\circ = \frac{1}{2} ; \quad \tan 0^\circ = 0$$

Assim, temos:

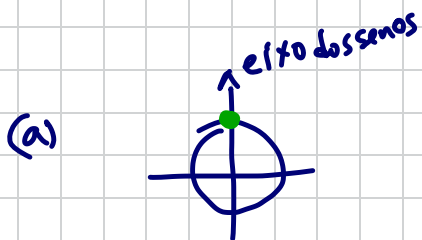
$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\sin 315^\circ + \tan 135^\circ}{2 \cdot \cos 60^\circ - \tan 0^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + (-1)}{\cancel{2} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} - 0} = \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{-\sqrt{2} - 1}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2} + 1}{2} // \end{aligned}$$

LISTA 03:

5. Determine a expressão geral, em radianos, dos arcos x , para os quais:

(a) $\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = 1.$

(b) $\sec\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = -1.$



$$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = 1$$
$$\Downarrow$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{5} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

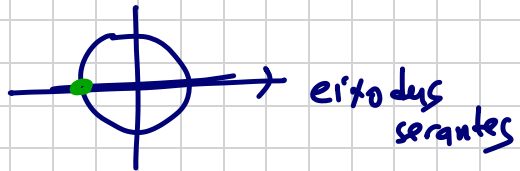
$$\frac{3x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}$$

$$\frac{3x}{2} = 2k\pi + \frac{7\pi}{10} \quad (\times 2)$$

$$3x = 4k\pi + \frac{7\pi}{5} \quad (\div 3)$$

$$x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{7\pi}{15}$$

$$(b) \sec\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = -1$$



$$\frac{x-1}{x+2} = 2k\pi + \pi$$

$$x-1 = (2k\pi + \pi) \cdot (x+2)$$

$$x-1 = 2k\pi \cdot x + 4k\pi + \pi x + 2\pi$$

$$x - 2k\pi x - \pi x = 2\pi + 4k\pi + 1$$

$$x(1 - 2k\pi - \pi) = 2\pi + 4k\pi + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pi + 4k\pi + 1}{1 - 2k\pi - \pi}$$

L3

6. Determine todos os valores de x para os quais $\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ não exista.

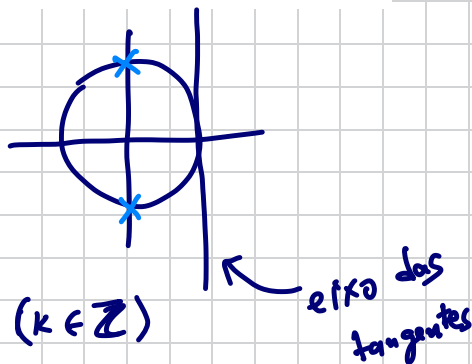
$$\cancel{\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\pi x - \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\pi x = k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\pi x = k\pi + \pi$$

$$x = \frac{k\pi + \pi}{\pi} = \frac{\pi(k+1)}{\pi} \Leftrightarrow x = k+1.$$



L3:

7. Calcule o valor de $y = \ln(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ)$.

$$y = \ln(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ) =$$

$$= \ln(\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ \cdot \dots \cdot \tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ \cdot \tan 45^\circ)$$
$$= \ln(\underbrace{\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ}_{\tan 1^\circ} \cdot \underbrace{\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ}_{\tan 2^\circ} \cdot \dots \cdot \underbrace{\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ}_{\tan 44^\circ} \cdot \tan 45^\circ)$$

$$= \ln \left[\cancel{\tan 1^\circ} \cdot \frac{1}{\cancel{\tan 1^\circ}} \cdot \cancel{\tan 2^\circ} \cdot \frac{1}{\cancel{\tan 2^\circ}} \cdots \cancel{\tan 44^\circ} \cdot \frac{1}{\cancel{\tan 44^\circ}} \cdot \tan 45^\circ \right]$$

$$= \ln [1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 1] = \ln 1 = 0 //$$

~~~~~

L3:

12. Ache os valores de  $x$  que verificam simultaneamente  $\tan a = \frac{x+1}{2}$  e  $\sec a = \sqrt{x+2}$ .

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \left( \frac{x+1}{2} \right)^2 = (\sqrt{x+2})^2$$

$$1 + \frac{x^2 + 2x + 1}{4} = x + 2 \quad (\times 4)$$

$$4 + x^2 + 2x + 1 = 4x + 8$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \begin{cases} \nearrow x = \frac{2+4}{2} = 3 // \\ \searrow x = \frac{2-4}{2} = -1. // \end{cases}$$