CÁLCULO II

09/05/24 — AULA 05

FUNÇÃO DE LIPSCHITZ:

Def.: Dizemos que uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é de LIPSCHITZ se, $\exists M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M.|x-y| \quad ; \quad \forall x, y \in [a,b].$$

A constante $M > 0$ chama-se uma CONSTANTE DE LIPSCHITZ.

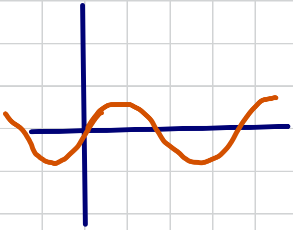
Ex.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ é de Lipschitz.

De fato; dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$.

Então:

$$|f(x) - f(y)| = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = \left|2.\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}.\cos\frac{x+y}{2}\right|$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2.\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$$



$$= 2.\left|\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right|.\underbrace{\left|\cos\frac{x-y}{2}\right|}_{\leq 1} \leq 2.\left|\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right|$$

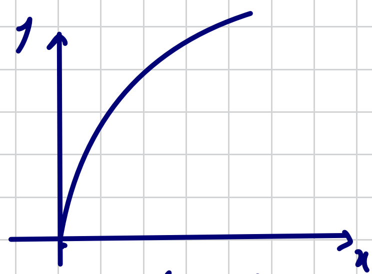
Como $^{(*)}$ $|\operatorname{sen} \alpha| \leq |\alpha|$, então:

$$|f(x)-f(y)| \leq 2.\left|\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right| \leq \cancel{2}.\left|\frac{x-y}{\cancel{2}}\right| \leq 1.|x-y|$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq 1.|x-y|$$

Então, $f(x)=\operatorname{sen} x$ é de Lipschitz. $(M=1)$

$f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x)=\sqrt{x}$.



AF.: f não é de Lipschitz.

Por absurdo, suponha que f seja de Lipschitz.

$(*)$ $|\operatorname{sen}\alpha| \leq |\alpha|$: isso pode ser provado usando o T.V.M.

$f(x)=\operatorname{sen} x$. cont. em $[0,\alpha]$ e derivável em $(0,\alpha)$.

Então, $\exists\, c \in (0,\alpha)$ tal que

$$f(\alpha)-f(0) = f'(c).(\alpha-0), \text{ i.e.;}$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \underbrace{\operatorname{sen} 0}_{=0} = \cos c.(\alpha)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos c.\ \alpha$$

$$\Rightarrow |\operatorname{sen}\alpha| = |\cos c.\alpha| = |\overbrace{\cos c}^{\leq 1}|.|\alpha| \leq |\alpha|$$

Então em particular, tome $x = 0$ e $y = \frac{1}{n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Disso, se f for de Lipschitz, então,

$\exists$ $M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M . |x - y| .$$

No caso:

$$\left| \sqrt{0} - \sqrt{\frac{1}{n}} \right| \leq M . \left| 0 - \frac{1}{n} \right|$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq M . \frac{1}{n} \qquad \times n$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n}} \leq M \quad , \forall n \in \mathbb{N} .$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \leq M \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{n}\sqrt{n}}{\cancel{n}} \leq M \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \leq M \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n \leq M^2 \quad , \underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}}} ;$$

ou seja o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais

fica limitada superiormente! Absurdo!
Portanto, f não é de Lipschitz.

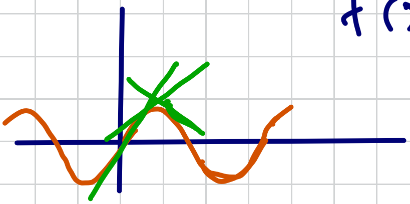
Se assumirmos f derivável, então, se ela também for de Lipschitz, ela dá um certo controle sobre as derivadas (inclinações), pois:

$$|f(x)-f(y)| \leq M \cdot |x-y|$$

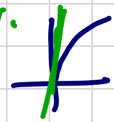
$$\Rightarrow \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq M$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq M$$

$$\Rightarrow \left|\underbrace{\lim_{x\to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}}_{f'(y)}\right| \leq M \Rightarrow |f'(y)| \leq M$$



→ POR ISSO $y = \operatorname{sen} x$ É DE LIPSCHITZ
MAS $y = \sqrt{x}$ NÃO É.



PROP.: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ for de Lipschitz, então f é contínua.

DEMONSTR.: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ de Lipschitz. Então, $\exists\, M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M . |x - y| \quad , \forall x, y \in [a,b].$$

Dado $x_0 \in [a,b]$. Vamos mostrar que f é cont. em x_0. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta > 0$ dado por $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Então, $\forall x \in [a,b]$ tal que $|x - x_0| < \delta$, temos:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M . |x - x_0| < M . \delta = \cancel{M} . \frac{\varepsilon}{\cancel{M}} = \varepsilon .$$

Ou seja, em "$\sim\sim\sim$", temos a def. de continuidade. Logo, f é contínua em x_0. Pela arbitrariedade da escolha de x_0, segue que f é contínua.

□

Vamos usar o resto da aula para resolução de exercícios.

L 1:

12. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função de Lipschitz, i.e., $\exists K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

para quaisquer $x, y \in [0,1]$. Mostre que

$$\left| \int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \right| < \frac{K}{2n}.$$

$$\left| \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \right| = \left| \int_0^1 f - \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots f\left(\frac{n}{n}\right) \right) \right|$$

$$= \left| \frac{n \cdot \int_0^1 f - f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right) - \cdots - f\left(\frac{n}{n}\right)}{n} \right| =$$

Vamos "espalhar" cada uma das n $\int_0^1 f$ para cada $f\left(\frac{i}{n}\right)$

$$= \left| \frac{\int_0^1 f - f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_0^1 f - f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \int_0^1 f - f\left(\frac{n}{n}\right)}{n} \right|$$

$$= \frac{1}{n} \left| \left(\int_0^1 f - f\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \left(\int_0^1 f - f\left(\frac{2}{n}\right) \right) + \cdots + \left(\int_0^1 f - f\left(\frac{n}{n}\right) \right) \right|$$

$$= \frac{1}{m}\left|\left(\int_0^1 f - f\left(\tfrac{1}{m}\right)\underbrace{\int_0^1 1}_{=1}\right) + \left(\int_0^1 f - f\left(\tfrac{2}{m}\right)\int_0^1 1\right) + \dots\right.$$

$$\left. \dots + \left(\int_0^1 f - f\left(\tfrac{m}{m}\right)\int_0^1 1\right)\right|$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$$\leq \frac{1}{m}\cdot\left|\int_0^1 f - \int_0^1 f\left(\tfrac{1}{m}\right)\right| + \frac{1}{m}\left|\int_0^1 f - \int_0^1 f\left(\tfrac{2}{m}\right)\right| +$$

$$\dots + \frac{1}{m}\left|\int_0^1 f - \int_0^1 f\left(\tfrac{m}{m}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{m}\cdot\left|\int_0^1 \left(f - f\left(\tfrac{1}{m}\right)\right)\right| + \frac{1}{m}\left|\int_0^1 \left(f - f\left(\tfrac{2}{m}\right)\right)\right| + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{m}\left|\int_0^1 \left(f - f\left(\tfrac{m}{m}\right)\right)\right| \leq$$

$\left|\int f\right| \leq \int |f|$

$$\leq \frac{1}{n}\int_0^1 \left|f(x)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right| + \frac{1}{n}\int_0^1 \left|f(x)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right| + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n}\int_0^1 \left|f(x)-f\left(\frac{n}{n}\right)\right| \;;$$

e como f é de Lipschitz, então

$$\left|f(x)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \leq K\left|x-\frac{i}{n}\right| \;.$$ Disso,

obtemos:

$$\left|\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \left|f(x)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 K\cdot\left|x-\frac{i}{n}\right| \leq \frac{K}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \left|x-\frac{i}{n}\right|$$

$$= \frac{K}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 |nx-i| \;.$$

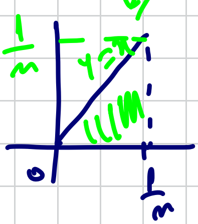
Note que, $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$; temos:

$$|nx - i| = \begin{cases} nx - i, & \text{se } 0 \leq x < \frac{i}{n} \\ i - nx, & \text{se } \frac{i}{n} < x \leq 1 . \end{cases}$$

Então

$$\int_0^1 |nx - i| = \int_0^{\frac{1}{n}} (nx - i) + \int_{\frac{1}{n}}^1 (i - nx) =$$

$$= n\int_0^{\frac{1}{n}} x - \int_0^{\frac{1}{n}} i + \int_{\frac{1}{n}}^1 i - n\int_{\frac{1}{n}}^1 x =$$



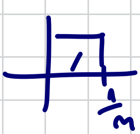
$$\int_0^{\frac{1}{n}} x = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2n^2}$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 x = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

=

$$= \cancel{n} \cdot \frac{1}{2n^{\cancel{2}}} - i\int_0^{\frac{1}{n}} 1 + i \cdot \int_{\frac{1}{n}}^1 - n \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$



$$= \frac{1}{2n} - i \cdot \frac{1}{n} + i \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{i}{n} + i - \frac{i}{n} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{n}{2} - \frac{2i}{n} + i$$

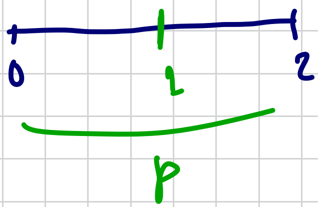
(...)

?

muito longo

13. Considerando uma partição conveniente do intervalo $[0,2]$ e utilizando a definição de integral, obtenha as estimativas

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \le \int_0^2 \sqrt{x^4+2}\,dx \le 3\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$



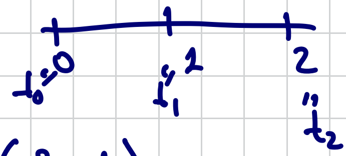
$P = \{0, 1, 2\}$

COMO SÃO DOIS ADITIVOS, VAMOS TOMAR UMA PARTIÇÃO COM 2 SUBINTERVALOS. O MAIS SIMPLES É O DESCRITO ACIMA.

Como:

$$s(f;P) \le \int_0^2 \sqrt{x^4+2}\,dx \le S(f;P) \; ;$$

No caso, tem-se:



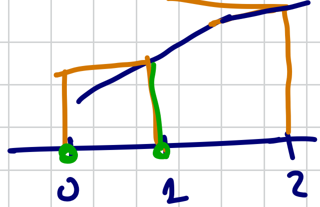
$$S(f;P) = M_1\cdot\overbrace{(1-0)}^{t_1-t_0} + M_2\cdot\underbrace{(2-1)}_{t_2-t_1}$$

Como $f(x) = (x^4+2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x^4+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4x^3$

$$f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2}} > 0 \text{ em } [0,2]$$

Logo, f é crescente. Então:

$$M_1 = f(1) \; ; \quad M_2 = f(2)$$



$M_1 = f(1) = \sqrt{(1)^4+2} = \sqrt{3}$;

$M_2 = f(2) = \sqrt{(2)^4+2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

Logo ; $S(f;P) = M_1 \cdot 1 + M_2 \cdot 1$

$= \sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

Do mesmo modo ;

$m_1 = f(0)$ e $m_2 = f(1)$;

i.e.;

$m_1 = f(0) = \sqrt{(0)^4+2} = \sqrt{2}$; e

$m_2 = f(1) = \sqrt{3}$ (calculado acima) .

Assim :

$s(f;P) = m_1 \cdot \overbrace{1}^{t_1 - t_0 = 1} + m_2 \cdot \overbrace{1}^{t_2 - t_1 = 1} =$

$= \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

concluindo:

$$s(f;P) \leq \int_0^2 \sqrt{x^4+2}\,dx \leq S(f;P)$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \leq \int_0^2 \sqrt{x^4+2} \leq \sqrt{3}+3\sqrt{2}$$