

Na aula anterior iniciamos o estudo de seqüências.

Vimos, por exemplo, que se uma seqüência (z_n) é convergente, então (z_n) é limitada.

Justificamos que a recíproca, em geral, é falsa.

Vamos estudar nesta aula um teorema importante chamado do Teorema de Bolzano-Weierstrass.

PONTO ADERENTE

Def.: Seja $(z_n) \subset \mathbb{C}$ uma seqüência complexa.

Dado um conj. $S = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\} \subset \mathbb{N}$, infinito; dizemos que (z_{n_k}) ; $n_k \in S$ é uma subseqüência da seq. (z_n) .

Em outras palavras; uma subseqüência é uma seqüência extraída de uma seqüência.

Ex: $z_n = i^n$. Neste caso, a seq. (z_n) é:

$$(z_n) = (i, \textcircled{-1}, -i, \textcircled{1}, i, \textcircled{-1}, -i, \textcircled{1}, \dots)$$

$(z_{2n}) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ é uma subsequência da sequência (z_n) .

Def: Dizemos que $a \in \mathbb{C}$ é um ponto aderente da sequência $(z_n) \subset \mathbb{C}$ se, e só se, $\exists (z_{n_k})$ subsequência da sequência (z_n) tal que $z_{n_k} \rightarrow a$

Ex: $z_n = i^n$; temos que, por exemplo,

1 é aderente à (z_n) , pois; podemos tomar a subsequência $(z_{n_k}) = (1, 1, 1, \dots)$

Def: Dizemos que $a \in \mathbb{C}$ é um ponto aderente a um conjunto $P \subset \mathbb{C}$ se, e só se, $\exists (z_n) \subset P$ tal que $z_n \rightarrow a$.

obs.: As duas definições acima são, de fato, equivalentes. Por exemplo, se uma seq. $(z_n) \subset \mathbb{C}$ podemos considerá-la como sendo o conj. P a conj. de todos os pontos da seq. (z_n) ; ou seja, $P = \{z_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$.

Então, neste caso, se $a \in \mathbb{C}$ é aderente a P , então, temos uma seq. $(w_n) \subset P$ tal que $w_n \rightarrow a$. Se pensarmos na seq. (z_n) em si, então, (v_n) seria uma subseq. em (z_n) tal que $v_n \rightarrow a$.

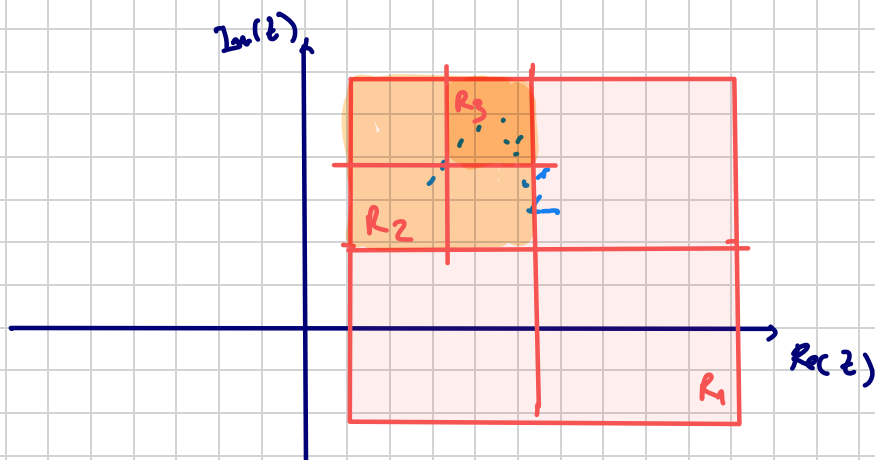
TEOREMA (T. DE BOLZANO - WEIERSTRASS) Toda sequência limitada possui subsequência convergente.

DEMONSTR.: Seja (z_n) uma seq. limitada. Então,
 $\exists M > 0$ tal que $|z_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja R_1 um retângulo paralelo aos eixos real e imaginário tal que contenha todos os z_n .

Divida R_1 pelos pontos médios, obtendo 4 retângulos menores. Pelo menos um deles conterá infinitos termos da sequência (z_n) . Vamos denotá-lo por R_2 . Divida R_2 pelos pontos médios e obtenhamos 4 retângulos menores, onde pelo menos um deles conterá, ainda, infinitos termos da sequência (z_n) . Vamos denotá-lo por R_3 . Seguimos esses passos indutivamente, obtendo assim, uma seq. de retângulos (R_n) , tal que

$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset R_4 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$,
 encaixados, e todos contendo uma quantidade
 infinita de termos da seq. (z_n) .



Sejam (X_n) e (Y_n) , respectivamente, as
 projeções de (R_n) sobre os eixos real e imagi-
 nário; determinando duas sequências de
 intervalos fechados e encaixados (em cada
 eixo):

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots \quad \text{e} \quad Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \dots$$

Pelo T. dos intervalos fechados e encaixados
 da Análise Real, segue que $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

tais que $\alpha \in X_m, \forall m$ e $\beta \in Y_m, \forall m$.

Defina o número complexo $w = \alpha + \beta i$

Então, $w \in R_m, \forall m \in \mathbb{N}$, por construção

Vamos destacar, da construção montada acima, uma subsequência (z_{n_k}) ; como segue:

- Tome $n_1 > 1$ qualquer. Então $z_{n_1} \in R_1$, pois R_1 contém todos os termos da seq. (z_n)
- escolha $n_2 > n_1$ tal que $z_{n_2} \in R_2$ (é possível pois R_2 possui infinitos termos da seq. (z_n))
- escolha $n_3 > n_2$ tal que $z_{n_3} \in R_3$ (é possível pois R_3 contém infinitos termos da seq. (z_n))
- $\vdots$
- escolha $n_{k+1} > n_k$ tal que $z_{n_{k+1}} \in R_{k+1}$
(é possível pois R_{k+1} possui infinitos

termos da seq. (z_n)

$\vdots$

Ou seja, obtemos uma subsequência (z_{n_k}) de sequência (z_n) .

Resta mostrar que (z_{n_k}) é convergente.

Note que, por construção, $z_{n_k} = \alpha_{n_k} + \beta_{n_k} \cdot i$, onde $\alpha_{n_k} \in X_k$ e $\beta_{n_k} \in Y_k$.

Seja l_k o comprimento do k -ésimo intervalo X_k . Então; como $\alpha_{n_k} \in X_k$ e $\alpha \in X_m, \forall m$.

$$d(\alpha_{n_k}, \alpha) \leq l_k = \frac{1}{2} l_{k-1} = \frac{1}{2^2} l_{k-2} = \dots = \frac{1}{2^{k-1}} l_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Ou seja, $\alpha_{n_k} \rightarrow \alpha$.

Do mesmo modo, seja m_k o comprimento do k -ésimo intervalo Y_k . Como

$\beta_{n_k} \in Y_k$ e $\beta \in Y_m, \forall m$, temos:

$$d(\beta_{n_k}, \beta) \leq m_k = \frac{1}{2} m_{k-1} = \dots = \frac{1}{2^{k-1}} m_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Ou seja $\beta_{n_k} \rightarrow \beta$

Conclusão:

$$\alpha_{n_k} \rightarrow \alpha \text{ e } \beta_{n_k} \rightarrow \beta$$



$$z_{n_k} = \alpha_{n_k} + \beta_{n_k} i \rightarrow \alpha + \beta i = w$$

□

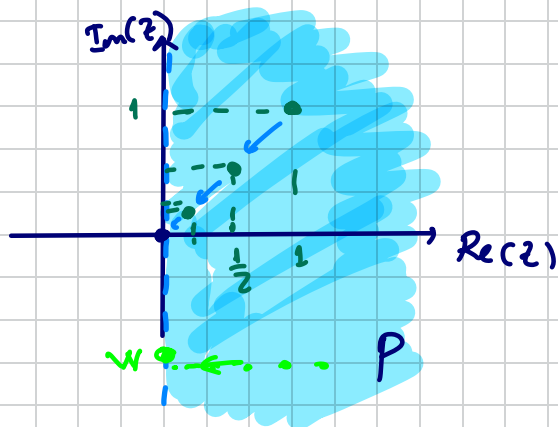
Def.: Chamamos o FECHO de um conjunto $P \subset \mathbb{C}$
o conjunto de todos os pontos aderentes a P ;
e denotamos por $\overline{P}$.

PROPOSIÇÃO: Dado $P \subset \mathbb{C}$. Então $P \subset \overline{P}$.

DEMONSTRA De fato; seja $\alpha \in P$. Então tome a sequência $z_n = \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$ (sequência constante); que é tal que $z_n \rightarrow \alpha$.

Ou seja, $\alpha \in \overline{P}$. Pela arbitrariedade da escolha do ponto α , segue a conclusão. $\square$

Ex: $P = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$, um aberto de $\mathbb{C}$.



Por exemplo $0 = 0 + 0i \notin P$, mas

$0 \in \overline{P}$; pois, por exemplo, podemos tomar a sequência $z_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}i$; tal que

$$z_n \in P, \forall n \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 + 0i = 0$$

$$\text{Logo, } 0 \in \bar{P}.$$

De fato, $\forall w \in \partial P = \{0 + bi : b \in \mathbb{R}\}$;
 $w \in \bar{P}$. (exercício)

Este exemplo nos faz conjecturar que
 $\bar{P} = \text{int}(P) \cup \partial P$.

De fato, este resultado é verdadeiro, ou seja;
 temos a proposição:

PROP.: Seja $P \subset \mathbb{C}$ um conjunto não vazio de $\mathbb{C}$.
 Então, $\bar{P} = \text{int}(P) \cup \partial P$.

DEMONSTR.

AF-01: $\text{int}(P) \cup \partial P \subset \bar{P}$:

Dado $\alpha \in \text{int}(P) \cup \partial P$.

• se $\alpha \in \text{int}(P)$, então, $\exists \delta > 0$ tal que

$U_\delta(\alpha) \subset P$. Em particular $\alpha \in P \subset \bar{P}$

Suponha, $\alpha \in \bar{P}$.

- se $\alpha \in \partial P$, então, $\forall \delta > 0$;

$$U_\delta(\alpha) \cap P \neq \emptyset \text{ e } U_\delta(\alpha) \cap P^c \neq \emptyset.$$

Dado $z_n \in U_\delta(\alpha) \cap P$.

Em particular $z_n \in P$ e

$$z_n \in U_\delta(\alpha), \forall \delta > 0. \text{ Tome } \delta = \frac{1}{n} > 0.$$

Então; $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \delta = \frac{1}{n}$.

(propriedade arquimediana). Suponha;

$$z_n \in U_{\frac{1}{n}}(\alpha) \text{ e tal que, } \forall n \geq n_0.$$

$$d(z_n, \alpha) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta; \text{ i.e.};$$

$$z_n \rightarrow \alpha, \text{ com } z_n \in P.$$

Suponha; $\alpha \in \bar{P}$.

Em qualquer dos casos segue que $\alpha \in \bar{P}$.

Sele arbitrariedade da escolha de α segue

a AF-01.

AF-12: $\bar{P} \subset \text{int}(P) \cup \partial P$:

Dado $\alpha \in \bar{P}$. Então, $\exists (z_n) \subset P$ tal que $z_n \rightarrow \alpha$.

A mostrar: $\alpha \in \text{int}(P) \cup \partial P$.

Por absurdo, se $\alpha \notin \text{int}(P) \cup \partial P$.

Então $\alpha \notin \text{int}(P)$ e $\alpha \notin \partial P$.

Em particular, $\alpha \notin \text{int}(P)$. Então, $\forall \delta > 0$,
 $U_\delta(\alpha) \not\subset P$.

Como $z_n \rightarrow \alpha$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para o
 $\delta > 0$, $d(z_n, \alpha) < \delta$, $\forall n \geq n_0$;

ou seja, $z_n \in U_\delta(\alpha)$, $\forall n \geq n_0$

Além disso, $z_n \in P$, $\forall n$. Logo;

$$z_n \in U_\delta(\alpha) \cap P; \quad \forall n \geq n_0,$$

e então $U_\delta(\alpha) \cap P \neq \emptyset$. Mas $\alpha \notin \partial P$;

logo, necessariamente $U_\delta(\alpha) \cap P = \emptyset$; um

absurdo! Portanto, $\alpha \in \text{int}(P) \cup \partial P$,
provando a AF-02.

As afirmações 01 e 02 provam o
resultado.

□

Def.: Dizemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ se, e

só se, $\forall K > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$.

$$\Rightarrow |z_n| > K.$$

Obs.: Se $(z_n) \subset \mathbb{C}$; na def. acima
dizemos que (z_n) diverge.

Se $(z_n) \subset \overline{\mathbb{C}}$, na def. acima dizemos
que (z_n) converge para o ponto ∞ .
