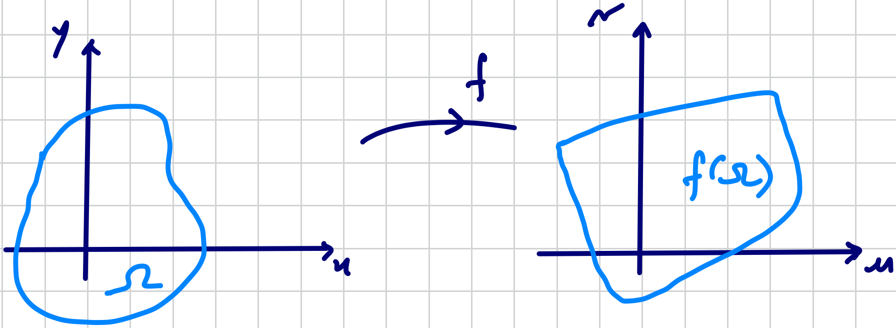
VARIÁVEIS COMPLEXAS

28/05/25 - AULA 09

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

Def.: Chama-se função de variável complexa toda função $f: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que transforma uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$ para uma região $f(\Omega) \subset \mathbb{C}$

$$f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow f(\Omega) \subset \mathbb{C}$$



Dado $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$, escrevemos, de forma geral, $z = x + iy$, a f manda o número complexo z para o número complexo $f(z) = u + iv$; onde

$$u = u(x,y)$$
$$v = v(x,y)$$

Ou seja, $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$.

Por esta razão, denotamos

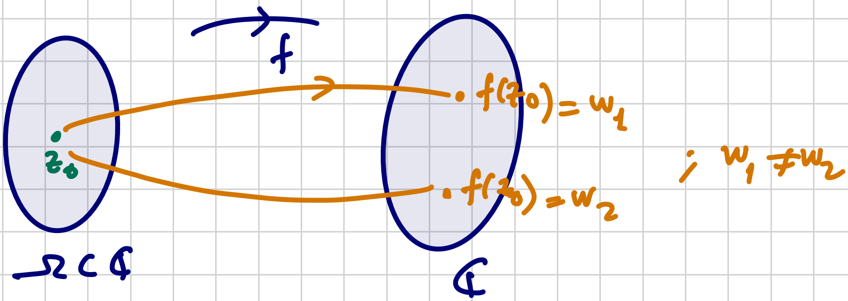
$$u = u(x,y) = Re(f)$$

$$v = v(x,y) = Im(f)$$

Existem dois grandes tipos de funções complexas:

- <u>UNÍVOCAS</u>: cuja definição é exatamente a mesma de função real: ou seja, dada $f: \Omega \to \mathbb{C}$, dado $z_0 \in \Omega$, existe uma única imagem $f(z_0)$ associada a ele.

- <u>PLURÍVOCAS</u>: as funções $f: \Omega \to \mathbb{C}$ tais que, dado um $z_0 \in \Omega$, existem mais de uma imagem associada a $f(z_0)$.



Simbolicamente, podemos escrever que $f: \Omega \to \mathbb{C}$ é plurívoca se, $\forall z_0 \in \Omega$; $\exists\, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$; $w_1 \neq w_2$ tais que $f(z_0) = w_1$ e $f(z_0) = w_2$

De fato, uma função plurívoca pode assumir, infinitas imagens para um mesmo elemento z_0 do domínio Ω da função.

(obs. Veja, que no caso real, uma função plurívoca não seria uma função).

Vejamos alguns exemplos:

01) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = z^2$.

Neste caso, temos $z = x + iy$. Então

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xy.i + i^2y^2$$

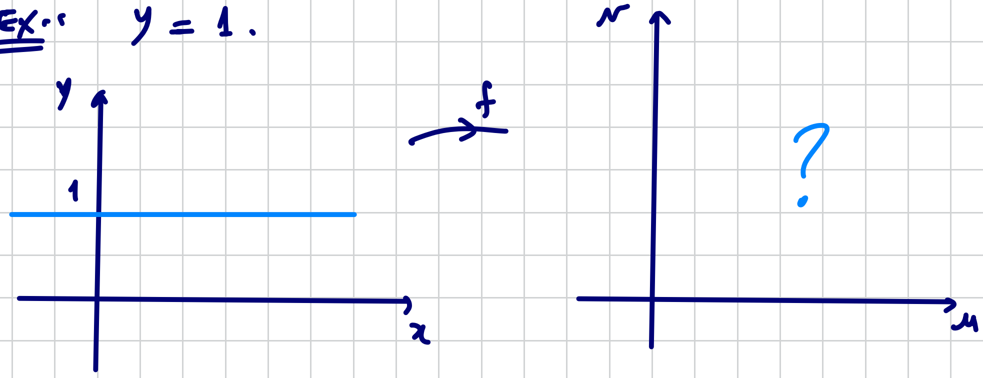
$$\Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 + i.(2xy) = u + iv,$$

onde $\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$

Vamos verificar alguns fatos: uma reta

horizontal no plano xy se transformará em que curva no plano uv?

Ex.: $y = 1$.



Neste caso, teremos:

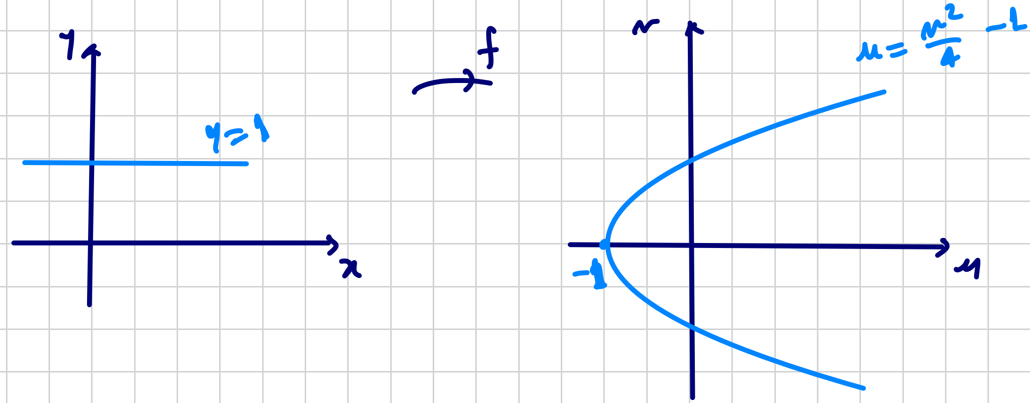
$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 = x^2 - 1 & (y = 1) \\ v = 2xy = 2x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ relacionando u e v:

$$\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = 2x \longrightarrow x = \dfrac{v}{2} \end{cases}$$

$$u = \frac{v^2}{4} - 1$$

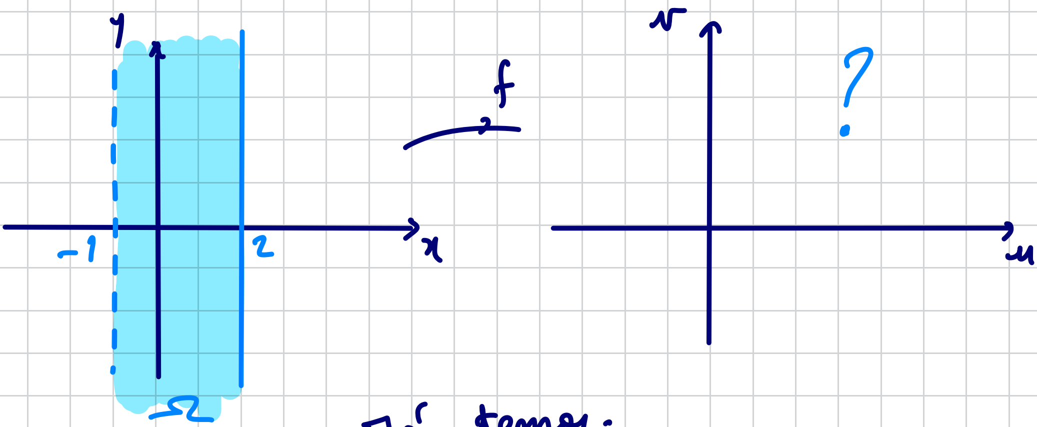
(parábola no plano uv)



Ainda considerando $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = z^2$; sendo Ω a faixa infinita

$$\Omega = \{ (x, y) : -1 < x \leq 2 \ ; \ y \in \mathbb{R} \}.$$

No que se transforma $f(\Omega)$?



Já temos:

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases};$$

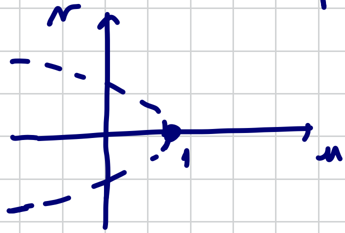
então, para $x = -1$, teremos:

$$\begin{cases} u = (-1)^2 - y^2 \\ v = 2\cdot(-1)\cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = -2y \end{cases}$$

$$\hookrightarrow y = -\frac{v}{2}$$

$$\Rightarrow u = 1 - \left(-\frac{v}{2}\right)^2$$

$$u = 1 - \frac{v^2}{4}$$

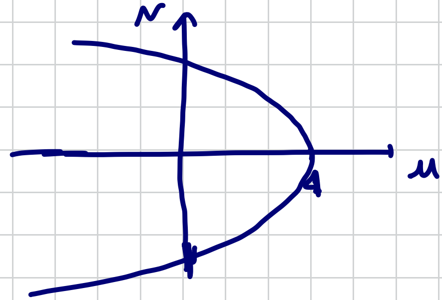


E, para o outro extremo $x = 2$, teremos:

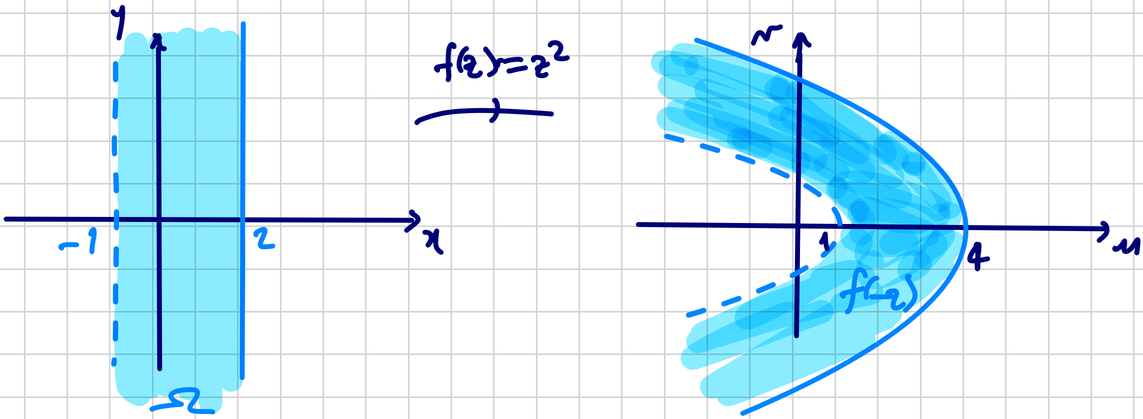
$$\begin{cases} u = (2)^2 - y^2 \\ v = 2\,(2)\cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 4 - y^2 \\ v = 4y \end{cases}$$

$$\hookrightarrow y = \frac{v}{4}$$

$$u = 4 - \frac{v^2}{16}$$



Então, juntando as duas curvas obtidas num mesmo plano uv, e observando que teremos a região interna, obtemos



02) $f: \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = Re\left(\frac{1}{z}\right)$; e tome $\Omega = \partial D_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$.

$$f(z) = Re\left(\frac{1}{z}\right).$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

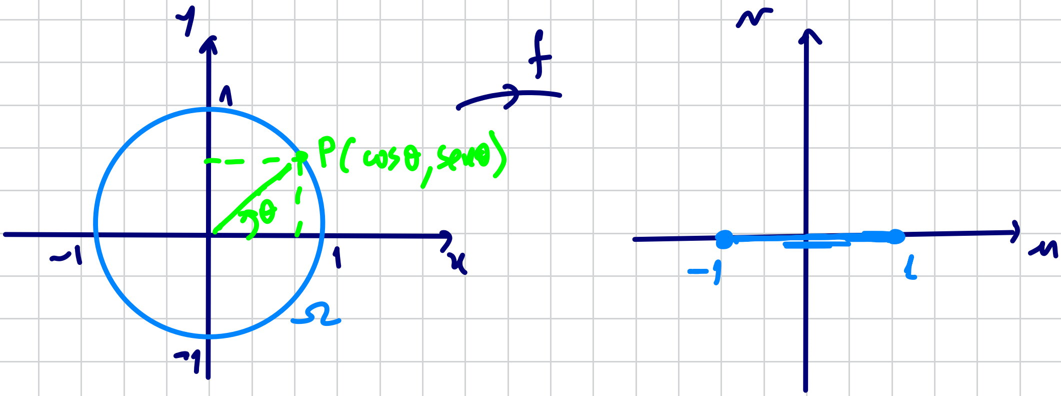
$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot i$$

Logo:

$$f(z) = Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = u + iv;$$

Logo, $\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} = x \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$

pois no $\partial D(0,1)$, temos $x^2+y^2=1$.



$\begin{cases} u = x \\ v = 0 \end{cases}$; $x = \cos\theta$ e $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

03) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$; $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x+iy} =$$

$$= x + iy + \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy}$$

$$= x + iy + \frac{x - iy}{x^2+y^2}$$

$$= x + iy + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot i$$

$$= x + \frac{x}{x^2+y^2} + i \cdot \left(y - \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x + \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = y - \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

04) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}}$

$f(z) = \sqrt[3]{x+iy}$, é uma função plurívoca, pois para cada z do domínio teremos 3 imagens distintas (raízes cúbicas), conforme a fórmula da raiz de DE MOIVRE.

(mais adiante poderemos determiná-los).

Def.: Dado $f: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa; dizemos que f é:

(a) injetiva, se $f(z_0) = f(z_1) \Rightarrow z_0 = z_1$.

(b) sobrejetiva, se, $\forall\, w \in \mathbb{C} = CD(f)$, $\exists\, z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = w$; ou ainda;

$$f(\Omega) = CD(f).$$

(c) bijetiva se for injetiva e sobrejetiva.

FUNÇÕES ELEMENTARES:

A FUNÇÃO EXPONENCIAL COMPLEXA: É uma extensão do conceito da exponencial real.

Dado $x \in \mathbb{R}$, do Cálculo, temos que a função $f(x) = e^x$ é expandida em série de potências por:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Considerando iy ao invés de x, teríamos:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots$$

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right)}_{= \cos y} + i\underbrace{\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)}_{= \operatorname{sen} y}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y} \quad \text{(Relação de Euler)}$$

Isto inspira definir:

Def.: Definimos a função exponencial complexa por

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$;

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$= e^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Neste caso, temos:

$$f(z) = e^z = e^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y) =$$

$$= e^x \cdot \cos y + i \cdot e^x \cdot \operatorname{sen} y = u + i v;$$

isto é; $\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \cdot \operatorname{sen} y \end{cases}$

<u>PROPOSIÇÃO</u>: A função $f(z) = e^z$ é periódica, com período $2\pi i$.

<u>DEMONSTR.</u>: De fato, $\forall z \in \mathbb{C}$; e vem:

$$f(z+2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^{x+i y+2\pi i} =$$

$$= e^{x+i\cdot(y+2\pi)} = e^x \cdot \big(\cos\underbrace{(y+2\pi)}_{=y} + i \cdot \operatorname{sen}\underbrace{(y+2\pi)}_{y}\big)$$

$$= e^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^{x+iy} = e^z = f(z)$$

$\square$