

Na aula anterior iniciamos o estudo de funções de uma variável complexa.

$$f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

$$z \mapsto f(z) = u + i \cdot v;$$

$$\text{onde } \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

Apresentamos a função exponencial:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) = e^z.$$

Tomando $z = x + i \cdot y$ ($x, y \in \mathbb{R}$); temos

$$\begin{aligned} f(z) = e^z &= e^{x+i \cdot y} = e^x \cdot e^{i \cdot y} \\ &= e^x (\cos y + i \cdot \sin y) \end{aligned}$$

Ao que segue apresentaremos algumas propriedades da função exponencial.

PROPOSIÇÃO: A função exponencial complexa goza das seguintes propriedades:

$$(a) \quad e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad ; \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

$$(b) \quad e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$(c) \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

$$(d) \quad e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

DEMONSTRAÇÃO:

(a) Escolha $z = x + iy$ e $w = p + iq$,
com $x, y, p, q \in \mathbb{R}$. Assim:

$$\begin{aligned} \underline{e^z \cdot e^w} &= e^{x+iy} \cdot e^{p+iq} = e^x \cdot \underbrace{e^{iy}} \cdot e^p \cdot \underbrace{e^{iq}} = \\ &= \underbrace{e^x \cdot e^p}_{\in \mathbb{R}} \cdot (\cos y + i \sin y) \cdot (\cos q + i \sin q) = \\ &= e^{x+p} \cdot (\underline{\cos y \cdot \cos q} + i \cdot \cos y \cdot \sin q + i \sin y \cdot \cos q - \underline{\sin y \cdot \sin q}) \\ &= e^{x+p} \cdot (\cos y \cdot \cos q - \sin y \cdot \sin q + i \cdot (\cos y \sin q + \sin y \cdot \cos q)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{x+iy} \cdot (\cos(y+q) + i \cdot \sin(y+q)) = \\
 &= e^{x+p} \cdot e^{i \cdot (y+q)} = e^{x+p+i \cdot y+i \cdot q} = e^{(x+i \cdot y) + (p+i \cdot q)} \\
 &= e^{z+w}
 \end{aligned}$$

(b) Note que $\underbrace{e^0}_{\in \mathbb{R}} = e^{0+0i} = \underbrace{e^0}_{\in \mathbb{R}} \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$

$$= 1 \cdot (1 + i \cdot 0) = \underbrace{1}.$$

Analogamente: $e^{z-z} = e^0 = 1 \neq 0$, e pelo item (a),

segue que:

$$e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = 1 \neq 0; \text{ ent\~ao para isso,}$$

segue que ambos e^z e e^{-z} s\~ao diferentes de zero. Isso prova (b)

(c) $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$:

$$\begin{aligned}
 \text{De fato: } e^z &= e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) \\
 &= e^x \cdot \cos y + i \cdot e^x \cdot \sin y
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|e^z|} = \sqrt{(e^x \cdot \cos y)^2 + (e^x \cdot \sin y)^2} =$$

$$= \sqrt{e^{2x} \cdot \cos^2 y + e^{2x} \cdot \sin^2 y}$$

$$= \sqrt{e^{2x} (\underbrace{\cos^2 y + \sin^2 y}_{=1})}$$

$$= \sqrt{e^{2x}} = e^x = \underline{\underline{e^{\operatorname{Re}(z)}}}$$

$$(d) e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i; \forall k \in \mathbb{Z} :$$

$$e^z = 1 \Leftrightarrow e^{x+iy} = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = 1 + 0i$$

$$e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y = 1 + 0i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x \cos y = 1 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Eliminando as quedadas e resolvendo as igualdades acima, temos:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} \cdot \cos^2 y = 1 \\ e^{2x} \cdot \sin^2 y = 0 \end{cases}$$

$$+ \quad e^{2x} (\underbrace{\cos^2 y + \sin^2 y}_{=1}) = 1$$

$$\underline{e^{2x} = 1 = e^0}$$

$\in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0} ;$$

e disso; voltando para $(*)$, temos:

$$\Leftrightarrow 1 \cdot \cos y = 1 \quad \text{e} \quad 1 \cdot \sin y = 0 \quad \Leftrightarrow \boxed{y = 2k\pi}$$

Conclusão:

$$\underline{e^z = 1} \Leftrightarrow z = x + iy \text{ onde } x = 0 \text{ e } y = 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z};$$

ou seja, $1e, 2e, 3e, \dots$, $\underline{z = 0 + 2k\pi i}, \forall k \in \mathbb{Z}.$

EXERCÍCIO: Encontre $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$e^z = 1 + i.$$

SOLUÇÃO:

$$e^z = 1 + i \Leftrightarrow e^{x+iy} = 1 + i$$

$$\Leftrightarrow e^x \cdot e^{iy} = 1 + i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{ix} (\cos y + i \sin y) = 1 + i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{ix} \cos y = 1 \\ e^{ix} \sin y = 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2ix} \cos^2 y = 1 \\ e^{2ix} \sin^2 y = 1 \end{cases}$$

$$+ \quad \underline{\quad \quad \quad}$$

$$e^{2ix} (\underbrace{\cos^2 y + \sin^2 y}_{=1}) = 2$$

$$e^{2ix} = 2 \quad (\text{em } \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{2ix} = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow 2ix = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \ln \sqrt{2}}$$

Então, (*) fica:

$$\begin{cases} e^{\ln \sqrt{2}} \cdot \cos y = 1 \\ e^{\ln \sqrt{2}} \sin y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \cos y = 1 \\ \sqrt{2} \sin y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$$

On seja, montamos a solução:

$$\underline{z = x + iy = \ln \sqrt{2} + i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)},$$

$\forall k \in \mathbb{Z},$

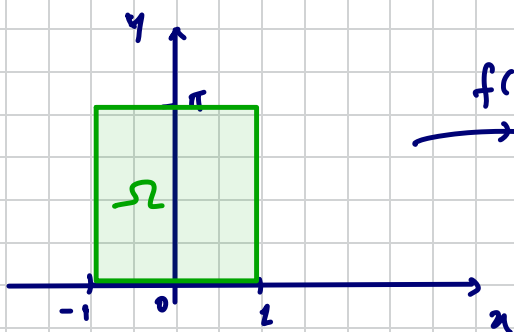
EXERCÍCIO: Seja Ω a região:

$$\Omega = \{ x + iy : -1 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \pi \}.$$

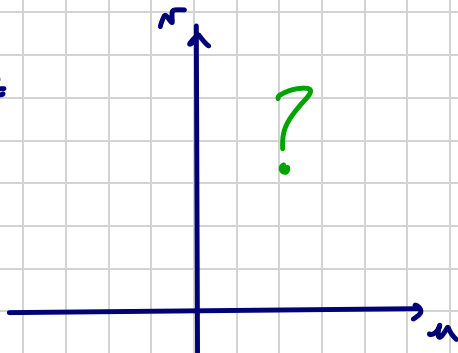
e defina $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ por $f(z) = e^z$.

Desenhe a imagem $f(\Omega)$.

SOLUÇÃO:



$$\xrightarrow{f(z) = e^z}$$



$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos(\overbrace{y}^{\text{ângulo}}) + i \sin(\overbrace{y}^{\text{ângulo}}))$$

$\nearrow$ ρ (módulo) $\nwarrow$ y : ang (z)

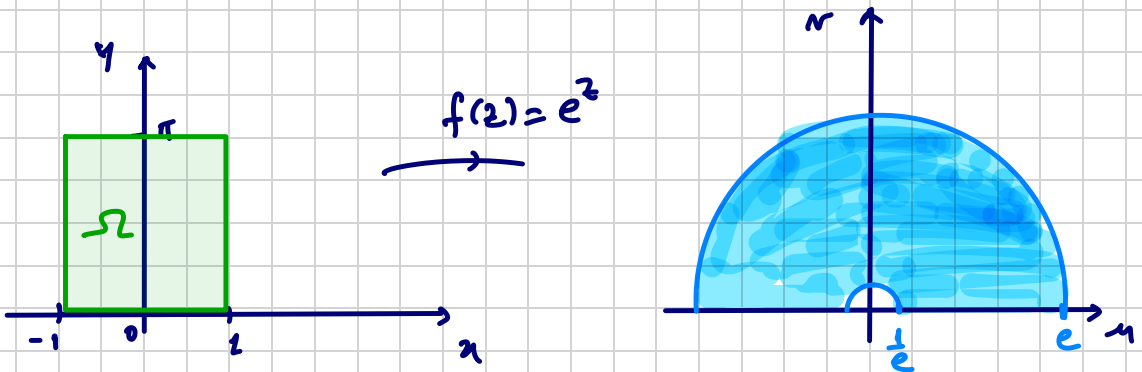
como $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^{-1} \leq e^x \leq e^1$

e^x (real)
e crescente

$\frac{1}{e} < \rho < e$

argumento γ varia entre 0 e π :
 $0 \leq \gamma \leq \pi$.

Da seja, $f(z)$ ficará:



REPRESENTAÇÃO POLAR DE UM NÚMERO COMPLEXO:

Da forma trigonométrica, temos

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Do estudo da função exponencial complexa,
 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. ; e assim podemos

emover:

$$z = \rho \cdot e^{i\theta}$$

chamada de representação de z na forma polar.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMPLEXAS:

Da relação de Euler de aula passada,
tem-se:

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y.} \quad (I)$$

Do mesmo modo,

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y);$$

e como da Trigonometria real, temos que o cosseno é par e o seno é ímpar, segue que

$$\boxed{e^{-iy} = \cos y - i \sin y} \quad (II)$$

Tomando (I) e (II), vamos encontrar:

$$e^{iy} + e^{-iy} = 2 \cdot \cos y$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}}$$

Fazendo (I) - (II), temos obter:

$$e^{iy} - e^{-iy} = 2i \cdot \sin y$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}}$$

Estas duas igualdades inspiram definições:

Def. Definimos as funções $\sin z$ e $\cos z$, respectivamente, por:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} ; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} ;$$

onde $z = x + iy$. Ambas estão definidas de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$.

Como são funções complexas, elas são decompostas da forma $u + i \cdot v$.

Wortbare mer: hier $f(z) = \cos z$:

$$f(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (e^{ix-y} + e^{-ix+y}) =$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-y} \cdot (\cos x + i \sin x) + e^y \cdot (\cos x - i \sin x))$$

$$= \frac{1}{2} [e^{-y} \cos x + e^y \cos x] + \frac{1}{2} [e^{-y} \sin x - e^y \sin x] i$$

$$= \underbrace{\frac{e^y + e^{-y}}{2}}_{\cosh y} \cos x + i \cdot \underbrace{\frac{e^y - e^{-y}}{2}}_{\sinh y} \cdot (-\sin x)$$

$$= \underbrace{\cosh y \cdot \cos x}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{\sinh y \cdot (-\sin x)}_{v(x,y)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \cosh y \cdot \cos x \\ v(x,y) = -\sinh y \cdot \sin x \end{cases}$$

obs.: Um fato importante sobre $\sin z$ e $\cos z$ que difere no caso real: no caso real, temos que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$. No caso complexo isso é falso.

Seu exemplo $\cos i$ serve:

$$\begin{aligned}\cos i &= \frac{e^{i \cdot (i)} + e^{-i \cdot (i)}}{2} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} = \\ &= \frac{\frac{1}{e} + e}{2} = \frac{1 + e^2}{2e} ;\end{aligned}$$

e neste caso ;

$$\begin{aligned}\underline{|\cos i|} &= \sqrt{\left(\frac{1+e^2}{2e}\right)^2 + (0)^2} = \\ &= \frac{1+e^2}{2e} = \frac{1}{2e} + \frac{e^2}{2e} > \frac{1}{2e} + 1 > 1 \quad \underline{\quad} \\ &\quad e^2 = e \cdot e > e + e = 2e\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\cos i| > 1.$$

Proposição: Valem as seguintes propriedades;

onde $z, w \in \mathbb{C}$:

$$(a) \quad \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$(b) \quad \operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \operatorname{sen} w \cdot \cos z$$

$$(b) \quad \cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} w$$

$$(d) \quad \cos(-z) = \cos z \quad ; \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$$

Demonstr. Faremos a prova do item (a) e os demais ficam como exercício.

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2iz} - 2e^{iz} \cdot e^{-iz} + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2e^{iz} \cdot e^{-iz} + e^{-2iz}}{4}$$

$$= \frac{-\cancel{e^{2iz}} + 2 - \cancel{e^{-2iz}} + \cancel{e^{2iz}} + 2 + \cancel{e^{-2iz}}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

□