VARIÁVEIS COMPLEXAS

23/05/25 - AULA 08

SEQUÊNCIA DE CAUCHY

Dizemos que uma sequência complexa (z_n) é de Cauchy se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0 \Longrightarrow d(z_m, z_n) < \varepsilon$.

$|z_m - z_n|$

TEOREMA (CRITÉRIO DE CAUCHY). Uma sequência (z_n) complexa é convergente se, e só se, ela for de Cauchy.

DEMONSTR.:

$(\Rightarrow)$ Suponha $(z_n) \subset \mathbb{C}$ uma sequência convergente, digamos que $z_n \to \alpha \in \mathbb{C}$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, tem-se $|z_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tome, então, $m, n \geq n_0$. Assim:

$|z_m - z_n| = |z_m - \alpha + \alpha - z_n| \leq$

$$\leq \underbrace{|z_m - \alpha|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|z_n - \alpha|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \underset{\sim}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underset{\sim}{\varepsilon}.$$

Ou seja, (z_n) é uma sequência de Cauchy.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que (z_n) seja uma sequência de Cauchy.

Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0$, implica em $|z_m - z_n| < \varepsilon$.

Note que, $\forall\, w \in \mathbb{C}$, tem-se que

$$|\mathrm{Re}\, w| \leq |w| \quad \text{e} \quad |\mathrm{Im}\, w| \leq |w|.$$

Disso, como $z_n = x_n + i \cdot y_n$,

então, $\forall m, n \geq n_0$; tem-se:

$$|x_m - x_n| \doteq |\mathrm{Re}(z_m - z_n)| \leq |z_m - z_n| < \varepsilon$$

Logo, a seq. $(x_n) \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy.

Do mesmo modo a seq. $(y_n) \subset \mathbb{R}$ será de Cauchy, ou seja:

$$|y_m - y_n| = |Im(z_m - z_n)| \leq |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Disso, temos que (x_n) e (y_n) de Cauchy; donde, da Análise Real, segue que (x_n) e (y_n) são convergentes.

Então, $z_n = x_n + y_n . i$ será convergente.

(exercício 06, LISTA 04)

$\square$

SÉRIES COMPLEXAS:

Def.: Seja $(z_n) \subset \mathbb{C}$ uma sequência complexa. Definimos a sequência (s_n) das somas parciais de (z_n) por:

$$s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k .$$

Note que, da seq. (s_n) das somas parciais podemos determinar a sequência (z_n) pondo:

$$s_1 = z_1 \longrightarrow \boxed{z_1 = s_1}$$

$$s_2 = z_1 + z_2 \Rightarrow z_2 = s_2 - z_1 = s_2 - s_1$$

$$s_3 = \underbrace{z_1 + z_2}_{s_2} + z_3 \Rightarrow z_3 = s_3 - s_2$$

$$\vdots$$

$$\boxed{z_n = s_n - s_{n-1}.}$$

Def: Definimos a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ como o limite da soma s_n; ou seja:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k := \sum_{n=1}^{\infty} z_n .$$

Se este limite existir diremos que a série é convergente, e do contrário, divergente.

Ex.: Verifique se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i}{n(n+1)}$ é convergente ou divergente. Sendo convergente, obtenha sua soma.

Solução: Escreva

$$z_n = \frac{i}{n(n+1)} = \frac{i}{n} - \frac{i}{n+1} .$$

Então, a soma parcial s_n será:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i}{k} - \frac{i}{k+1} \right)$$

$$= i - \cancel{\frac{i}{2}} + \cancel{\frac{i}{2}} - \cancel{\frac{i}{3}} + \cancel{\frac{i}{3}} - \cancel{\frac{i}{4}} + \cdots + \cancel{\frac{i}{n}} - \frac{i}{n+1}$$

$$= i - \frac{i}{n+1}.$$

Então, $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(i - \underbrace{\frac{i}{n+1}}_{\to 0} \right) = i$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n(n+1)}$ é convergente e converge para i.

PROP.: Se uma série complexa $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

DEMONSTR.: De fato, escrevendo

$$z_n = s_n - s_{n-1} \; ; \; e$$

como a série $\sum z_n$ é convergente, então

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) =$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} s_n}_{s} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} s_{n-1}}_{s} = s - s = 0$$

$\square$

CONVERGÊNCIA ABSOLUTA (EM MÓDULO)

Def.: Dizemos que uma série complexa $\sum z_n$ é absolutamente convergente (ou, convergente em módulo) se a série $\sum |z_n|$ for convergente.

Ex.: A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i}{n^2}$ é tal que:

$$z_n = \frac{1+i}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} i$$

Daí,

$$|z_n| = \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \sqrt{\frac{2}{n^4}} = \frac{\sqrt{2}}{n^2}$$

Então, $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n^2}$, que é uma p-série, com $p = 2 > 1$, e, portanto, convergente.

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i}{n^2}$ é absolutamente convergente.

PROP.: Uma série $\sum z_n$ absolutamente convergente é convergente, e

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| .$$

DEMONSTR.: Suponha $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolutamente convergente.

Então $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ é convergente.

Logo, a sequência $s_n = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ das somas parciais é convergente.

Logo, (s_n) é de Cauchy.

Disso, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$\forall m, n \geq n_0 \implies |s_m - s_n| < \varepsilon.$

Sem perda de generalidade, assuma que $m > n$.

Então, $\exists p \geq 1$ tal que $m = n + p$.

Assim, teremos:

$$|s_m - s_n| = |s_{n+p} - s_n| =$$

$$= \left| \cancel{|z_1|} + \cancel{|z_2|} + \dots + \cancel{|z_n|} + |z_{n+1}| + \dots + |z_{n+p}| - \cancel{|z_1|} - \cancel{|z_2|} - \dots - \cancel{|z_n|} \right| =$$

$$= \Big| |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_{n+p}| \Big| < \varepsilon .$$

Então, temos que

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_{n+p}| < \varepsilon$$

Ou seja; $|z_{n+1} + \dots + z_{n+p}| < \varepsilon$;

o que mostra que $\sum z_n$ é convergente.

Além disso:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \left| \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} z_k \right| =$$

$$= \left| \lim_{n \to \infty} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \left(|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

$\blacksquare$

TEOREMA: (TESTE DA COMPARAÇÃO). Sejam (z_n) e (w_n) duas sequências complexas tais que, $\forall\, n \geq n_0$ (n_0 fixado), tem-se

$$|z_n| \leq |w_n|.$$

Se $\sum |w_n|$ for convergente, então a série $\sum z_n$ será absolutamente convergente.

DEMONSTR.: Seja $\sum |w_n|$ convergente.

Então (s_n) - seq. das somas parciais de $\sum |w_n|$ é convergente. Logo, ela é de Cauchy. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, m, n \geq n_1$

$$\Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon.$$

Escreva $m = n + p$; $p \geq 1$ $(m > n)$

Disso:

$$|s_m - s_n| = \big|\, |w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \dots + |w_{n+p}| \,\big| < \varepsilon.$$

Ou seja;

$$\boxed{|w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \dots + |w_{n+p}| < \varepsilon} \qquad (**)$$

Tome $\tilde{n} = \text{máx.}\{n_0, n_1\}$.

Então, $\forall n \geq \tilde{n}$, valem $(*)$ e $(**)$, onde $(*)$ é a propriedade dada como hipótese, ou seja;

$$\boxed{|z_n| \leq |w_n|}, \ \forall n \geq n_0 \qquad (*)$$

Assim; $\forall n \geq \tilde{n}$, tem-se:

$$|z_{n+1}| \leq |w_{n+1}|$$

$$|z_{n+2}| \leq |w_{n+2}|$$

$$\vdots$$

$$|z_{n+p}| \leq |w_{n+p}|$$

$$\Rightarrow \underbrace{|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_{n+p}|} \leq |w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \dots + |w_{n+p}| < \varepsilon$$

Ou seja: $|z_{n+1}| + \dots + |z_{n+p}| < \varepsilon$, $\forall n \geq \tilde{n}$,

ou seja, $\sum |z_n|$ é convergente, i.e., $\sum z_n$ é absolutamente convergente.

$\square$

Ex.: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \operatorname{sen} n}{3n^2+1}$ é absolutamente convergente?

Sol.: Note que

$$|z_n| = \left| \frac{\cos n + i \operatorname{sen} n}{3n^2+1} \right| = \frac{|\cos n + i \operatorname{sen} n|}{3n^2+1} \leq \frac{1}{3n^2}$$

Então, considerando a série $\sum w_n$, onde

$|w_n| = \frac{1}{3n^2}$; é tal que

$$|z_n| \leq |w_n| \quad , \forall n \in \mathbb{N} \quad (n_0 = 1)$$

Então, como $\sum \frac{1}{3n^2}$ é convergente

(p-série, com $p = 2 > 1$);

segue que a série dada é absolutamente convergente.

TEOREMA (TESTE DA RAZÃO). Seja $\sum z_n$ uma série tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = c < 1.$$

Então, a série $\sum z_n$ é absolutamente convergente.

DEMONSTR.:

Suponha que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = c < 1.$

Tome $\varepsilon > 0$ tal que $c + \varepsilon < 1$. Então, pela definição de limite de seq. segue que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| - c \right| < \varepsilon;$$

ou seja,

$$0 < \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < c + \varepsilon \quad ; \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim:

$$0 < \left| \frac{\cancel{z_{n_0+1}}}{z_{n_0}} \right| < c + \varepsilon \quad ;$$

$$0 < \left| \frac{z_{n_0+2}}{\cancel{z_{n_0+1}}} \right| < c + \varepsilon \quad ;$$

$$0 < \left| \frac{z_{n_0+3}}{z_{n_0+2}} \right| < c+\varepsilon \ ;$$

$$\vdots$$

$$0 < \left| \frac{z_n}{z_{n-1}} \right| < c+\varepsilon .$$

Multiplicando todas estas $n-n_0$ desigualdades, obtemos:

$$\left| \frac{z_n}{z_{n_0}} \right| < (c+\varepsilon)^{n-n_0} \ ; \quad \forall n \geq n_0 .$$

Isolando $|z_n|$; vem:

$$|z_n| < \frac{|z_{n_0}|}{(c+\varepsilon)^{n_0}} \cdot (c+\varepsilon)^n \ , \quad \forall n \geq n_0 \ ;$$

e como $c+\varepsilon < 1$, a série

$$\underbrace{\frac{|z_{n_0}|}{(c+\varepsilon)^{n_0}}}_{\text{CONSTANTE}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (c+\varepsilon)^n$$

é uma série geométrica de razão $c+\varepsilon<1$; logo, convergente. Então, pelo TEOR. anterior segue que a série é convergente. $\square$