Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 06 de Exercícios - Funções de uma variável complexa

1. Determine a parte real $u(x, y)$ e a parte imaginária $v(x, y)$ de cada função complexa $w = f(z)$ abaixo.

   (a) $w = \dfrac{z+2}{z-2}$ (b) $w = \dfrac{z^2}{\overline{z}-1}$ (c) $w = \operatorname{sen} z$

   (d) $w = \cos \dfrac{1}{z}$ (e) $w = \log(1 - z)$ [no ramo principal]

2. Determine o domínio máximo de cada função complexa abaixo:

   (a) $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)\operatorname{sen} z}$ (b) $f(z) = \dfrac{z}{x} - \dfrac{y}{z}$ (c) $f(z) = \dfrac{z^2 + (z-1)^3}{(e^z - 1)\cos y}$

3. Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}(z) \geq 2\}$ e considere a função complexa $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = iz$. Obtenha a região $f(\Omega)$, desenhando domínio e imagem nos respectivos planos xy e uv.

4. Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ o disco de raio 2 centrado na origem do plano complexo, e considere $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$. Usando a notação na forma polar, conclua que a imagem de Ω por f é o disco centrado na origem de raio 4. Faça um desenho.

5. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^n$. Mostre que f transforma setores da forma $0 < \arg z < \alpha$ em setores da forma $0 < \arg z < n\alpha$.

6. Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 < x < 2\}$ uma faixa vertical infinita, e considere $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Desenhe as regiões Ω e $f(\Omega)$. [Para achar $f(\Omega)$, comece examinando as retas da fronteira de Ω: elas se transformarão em que curvas no plano uv pela f?]

7. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $f(z) = \frac{1}{z}$. No que se transformam as retas $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$ do plano xy para o plano uv através de f?

8. Considere a função $f(z) = \operatorname{sen} z$, para $z \in \mathbb{C}$. Demonstre que a imagem das curvas $x = c$, $y = c$, sendo c uma constante real, são, respectivamente, hipérboles e elipses no plano uv. Faça desenhos.

9. Um quadrado no plano complexo tem vértices em $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ e $D(0, 1)$. Determine a região do plano w na qual o quadrado é transformado por

   (a) $f(z) = z^2$ (b) $f(z) = iz - 1$ (c) $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$

10. Mostre que, se $0 < a < 1$, então $\dfrac{2\pi i e^{i\pi a}}{e^{2\pi a i} - 1} = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$.

11. Mostre que

    (a) $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ (b) $e^{\frac{2+\pi i}{4}}$ (c) $\operatorname{sen} i = \dfrac{1-e^2}{2ei}$

12. Escreva os seguintes números complexos na forma algébrica:

    (a) e^{2+i} (b) $\operatorname{sen}(1+i)$ (c) $\log(2^i)$

13. Ache todos os valores de

    (a) i^i (b) $\log(1)$ (c) $\log(1+i)$
    (d) $(-i)^i$ (e) 2^i (f) $\cos(-1+i)$

14. Diga se sempre se pode calcular $\log(\log z)$, para $z \neq 0$

15. Encontre o valor principal de $\log(1-2i)$.

16. Verifique que nem sempre vale a igualdade $\log(z \cdot w) = \log z + \log w$, onde $z, w \in \mathbb{C}$.

17. Prove que

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \quad \text{e} \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y.$$

18. Mostre que $\cos(i\overline{z}) = \overline{\cos(iz)}$, para todo $z \in \mathbb{C}$

19. Resolva as equações:

    (a) $\cos z = \dfrac{3+i}{4}$ (b) $\operatorname{sen} z = 4$ (c) $e^z = 1-i$ (d) $\log z = \dfrac{\pi}{2}i$

20. Encontre o valor principal de $\arccos(-2+i)$.

21. Ache os valores de

    (a) $\arctan(2i)$ (b) $\arctan(1+i)$ (c) $\arccos(-i)$

22. Mostre que as funções complexas seno hiperbólico e cosseno hiperbólico são periódicas de período $2\pi i$.

23. A partir da funções hiperbólicas complexas, deduza as fórmulas para as funções hiperbólicas complexas inversas, obtendo

$$\operatorname{arcsenh} z = \log(z + \sqrt{z^2+1}), \qquad \operatorname{arccosh} z = \log(z + \sqrt{z^2-1})$$

    e

$$\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}.$$

24. Usando o exercício 23, obtenha todos os valores de $\operatorname{arccosh}(-1)$ e de $\operatorname{arctanh} 0$.

25. Em cada caso abaixo, encontre um ramo que torne a função plurívoca dada em unívoca.

    (a) $f(z) = \sqrt{1-z}$ (b) $f(z) = \log\log(z)$
    (c) $f(z) = \sqrt{z(z-1)}$ (d) $f(z) = \sqrt{z^2+2z-3}$