

Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 05 de Exercícios - Séries em $\mathbb{C}$

1. Sejam duas séries complexas $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$. Mostre que, se ambas são convergentes, então as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (z_n w_n)$$

também são convergentes.

2. Seja (z_n) uma sequência complexa tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = c$. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge em módulo se $c < 1$ e diverge se $c > 1$ (*este é outro teste de convergência de séries*).

3. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{5^{\frac{n}{2}}}$, onde $w = \sqrt{3} + i$, é convergente.

4. Prove que a série $1 - 2i + 3i - 4i + \dots$ diverge.

5. Mostre que a série $1 + \frac{i}{3} + \left(\frac{i}{3}\right)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^{n-1}$ é convergente e que sua soma vale $\frac{9 + 3i}{10}$.

6. Mostre que a série complexa $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} + \frac{i}{n^2}$ converge.

7. Verifique a convergência ou divergência de cada série complexa a seguir:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}$