

Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 04 de Exercícios
Sequências em \mathbb{C}

1. Prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{i+n} = 0$.
2. Prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+n^2i}{n-n^2i} = -1$.
3. Seja a sequência complexa (z_n) dada por

$$z_n = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{3} \right)^n.$$

Represente geometricamente alguns de seus pontos e estude sua convergência.

4. Mostre que a sequência (z_n) dada por $z_n = \frac{1}{i + \sqrt{n}}$ é convergente. Qual é o seu limite?
5. Prove que se $z_n \rightarrow a$ quando $n \rightarrow \infty$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} = a.$$

6. Prove que uma sequência complexa $z_n = x_n + iy_n$ converge para $\alpha = a + ib$ se, e somente se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

7. Prove que $z_n \rightarrow \alpha$ se, e somente se $d(z_n, \alpha) \rightarrow 0$.
8. Sejam (z_n) e (w_n) duas sequências complexas tais que $|z_n| \leq |w_n|$, $\forall n$. Mostre que se $w_n \rightarrow 0$, então $z_n \rightarrow 0$.
9. Seja (z_n) uma sequência complexa tal que $z_n \rightarrow \alpha$. Considerando a sequência (w_n) definida por $w_n = \overline{z_n}$, mostre que $w_n \rightarrow \overline{\alpha}$.
10. Mostre que a sequência (z_n) dada por $z_n = \frac{i^n \cdot n}{n+1}$ possui uma subsequência convergente.
11. Prove que a sequência (z_n) dada por $z_n = \frac{\cos n\pi}{n}i$ é uma sequência de Cauchy.
12. Dada $z_n = n^2 - ni$, prove que $z_n \rightarrow \infty$.
13. Seja a sequência (z_n) dada por $z_n = n + i \ln n$. Prove que $z_n \rightarrow \infty$.

14. Por uma *vizinhança* no pólo norte N da esfera de Riemann S^2 definimos mediante a projeção estereográfica uma vizinhança do infinito no plano complexo extendido. Descreva tal vizinhança geometricamente. Dada uma sequência de pontos (z_n) no plano complexo \mathbb{C} , seja (P_n) a sequência de pontos correspondente na esfera de Riemann. Prove que $z_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ se, e somente se, $P_n \rightarrow N$ quando $n \rightarrow \infty$, i.e., se, e somente se, toda vizinhança de N contém um número infinito de termos da sequência (P_n) .