Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 03 de Exercícios - Topologia em $\mathbb{C}$

1. Desenhe o conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ em cada item a seguir. Decida se Ω é aberto ou fechado de $\mathbb{C}$ ou nem aberto e nem fechado. Encontre também o derivado de cada conjunto desenhado.

   (a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) > 0\}$
   (b) $\Omega = \mathcal{U}_1(i) \cup \mathcal{U}_1(0)$
   (c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ e } |\arg z| < \frac{\pi}{4}\} \cup \{0\}$
   (d) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z+3+i| \leq 1\}$

2. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ conjuntos fechados em $\mathbb{C}$. Prove que $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$ também é um fechado em $\mathbb{C}$.

3. Dê um contra-exemplo para mostrar que uma união de conjuntos fechados de $\mathbb{C}$ pode não ser um um conjunto fechado.

4. Considere $G_n = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ Ao variar n nos naturais temos que G_n determina uma família de abertos em $\mathbb{C}$. A união desta família é um aberto ou um fechado de $\mathbb{C}$?

5. Dado o conjunto X em cada item a seguir, faça sua representação geométrica. Em seguida, determine int X; ∂X e $\overline{X}$. O conjunto X é aberto, fechado ou nem aberto e nem fechado?

   (a) $X = \{z \in \mathbb{C} : |2z - i| < 1\}$.
   (b) $X = \{z \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}(z) < 1\}$.
   (c) $X = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z - i| < 2\}$.

6. O conjunto $P = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| < \frac{1}{2}\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z + 3| < \frac{1}{2}\}$ é conexo? Justifique.

7. Dizemos que um conjunto de $\mathbb{C}$ é um *domínio* do plano complexo $\mathbb{C}$ se for aberto não vazio e conexo. Isto posto, verifique se os conjuntos a seguir são domínios de $\mathbb{C}$.

   (a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Im\mathrm{m}(z - 3i) < 0, \Im\mathrm{m}(iz) < 0, |z| \leq 3\}$
   (b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}(z - 3i) \geq 0 \text{ ou } \Im\mathrm{m}(iz - i) < 0\} \cap \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 2| < 4\}$

8. Mostre que a região $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R} \text{ com } 0 \leq x \leq 1\}$ é fechada mas não limitada. Destaque um ponto qualquer em $\partial\Omega$ e justifique por quê o mesmo é um ponto de fronteira.

9. Se $X = \{x + iy : x \text{ e } y \text{ são racionais}\}$, calcule int X, $\overline{X}$ e ∂X.

10. Justifique que o conjunto $X = \{\dfrac{1+i}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ não é aberto e nem fechado de $\mathbb{C}$. Mostre que 0 é ponto de acumulação de X.

11. Dado o conjunto $W = \{i - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Qual(is) é(são) o(s) ponto(s) de acumulação deste conjunto?

12. Determine ∂P e int P, onde $P = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}\left(\frac{z}{z-i}\right) > 0\}$. Esse conjunto é limitado? É compacto? Justifique.

13. Mostre com um exemplo que a união de conexos não é, em geral, conexa.