

Para encerrar o estudo de logaritmos, vamos considerar o problema da MEIA VIDA de material radioativo. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a metade do material radioativo se desintegre para tornar-se estável.

Ex: se o tempo de meia vida é de 500 anos, sendo m_0 a massa inicial de um material radioativo, então, 500 anos depois restará $\frac{m_0}{2}$ do material. Portanto, outros 500 anos, restará $\frac{m_0}{2^2} = \frac{m_0}{4}$; e assim por diante.

Como ilustração, vamos resolver um exercício da LÍSTA 01:

L1:

33. Qual é a *meia vida*¹ de um material radioativo que sofre desintegração de 20% de sua massa em um período de 1 ano?

$$t = 0 \rightarrow m = m_0 \quad (\text{massa inicial})$$

$$t = 1 \rightarrow m = m_0 - \frac{20}{100} m_0 =$$

$$m_0 - \frac{1}{5} m_0 =$$

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right) m_0$$

$$t = 2 \Rightarrow m = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{5}\right) m_0} - \frac{1}{5} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{5}\right) m_0}$$

$$m = \left(1 - \frac{1}{5}\right) m_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{5}\right]$$

$$m = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 m_0$$

$$m(t) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^t m_0$$

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$$

Queremos o valor de t para que $m(t) = \frac{m_0}{2}$.

$$\frac{m_0}{2} = m_0 \left(\frac{4}{5} \right)^t$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{4}{5} \right)^t$$

$$\log \frac{1}{2} = \log \left(\frac{4}{5} \right)^t$$

$$\log 1 - \log 2 = t \cdot (\log 4 - \log 5)$$

$$t = \frac{-\log 2}{\log 4 - \log 5}$$

$$t \approx \frac{-0,301029995663981}{-0,09691001300856}$$

$$t \approx 0,39794 \text{ anos.} \times \underline{12}$$

$$t \approx 4,7752801 \text{ meses.}$$

$$4 \text{ meses} + 0,7752801 \text{ dias}$$

$$t \approx 4 \text{ meses e } 23 \text{ dias}$$

A meia vida é de, aprox. 4 meses e 23 dias.

L1

37. Um quadro de Vermeer (1632-1675) ainda contém 99,5% de seu carbono-14 (meia vida de 5730 anos). A partir dessa informação, você pode determinar se o quadro é ou não falsificado? Justifique.

$$t = 0 \Rightarrow m = m_0$$

$$t = 5730 \Rightarrow m = \frac{m_0}{2}$$

$$t = 2 \times 5730 \Rightarrow m = \frac{m_0}{2^2}$$

$\vdots$

$$t = k \cdot 5730 \Rightarrow m = \frac{m_0}{2^k}$$

De $t = k \cdot 5730 \Rightarrow$ $k = \frac{t}{5730}$

Assim temos:

$$m(t) = \frac{m_0}{2^k} = m_0 \cdot \frac{1}{2^k} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

Quando $m(t) \geq 99,5\% m_0$; quanto vale $t = ?$

$$\frac{99,5}{100} \cdot m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\frac{99,5}{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\log \frac{99,5}{100} = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\log 0,995 = \frac{t}{5730} \cdot \log(0,5)$$

$$\Rightarrow t = \frac{5730 \cdot \log 0,995}{\log 0,5}$$

$$t \approx \frac{5730 \cdot (-0,002176919254275)}{-0,301029995663981}$$

$$t \approx 41,43689 \text{ anos.}$$

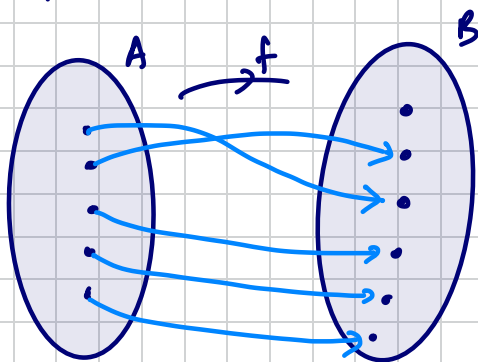
On reje ; o quadro possui pouco mais de 41 anos e como o seu pintor viveu no período (1632-1675) , segue que o quadro em questão é FALSO.

No que segue, mostraremos que as funções exponencial e logarítmica são inversas uma da outra. Para isto, precisamos de alguns resultados das funções elementares.

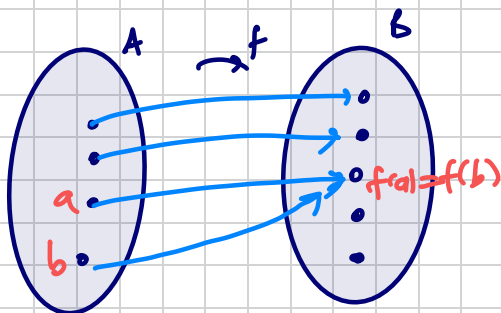
Def.: Dizemos que uma função $f: A \rightarrow B$ é injetiva se, e só se,

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

Ou, equivalentemente, $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.



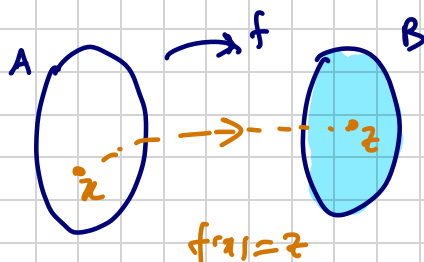
$f: A \rightarrow B$ é injetiva, pois domínios diferentes terão imagens diferentes.



esta $f: A \rightarrow B$ não é injetiva, pois temos $a \neq b$, mas $f(a) = f(b)$.

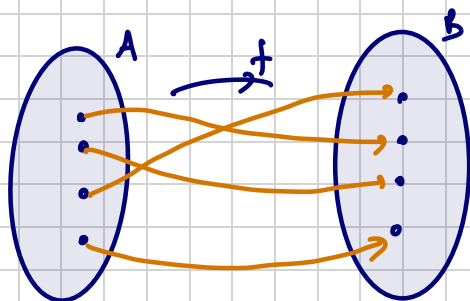
Def.: Dizemos que $f: A \rightarrow B$ é sobrejetiva se, e só se, todo elemento de B for imagem de algum elemento de A , mediante f .

Mais precisamente, $f: A \rightarrow B$ é sobrejetiva se, e só se, $\forall z \in B, \exists x \in A$ tal que $f(x) = z$.

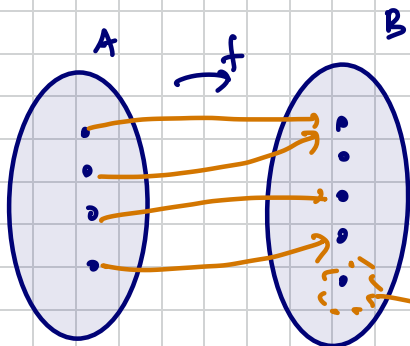


Uma outra forma de dizer que $f: A \rightarrow B$ é sobrejetiva é observar que $f(A) = \text{Im}(f) = B$.

(ou seja, se todo o conj. B é coberto pelo conj. A , mediante $f: A \rightarrow B$).



$\text{Im}(f) = B$, i.e.;
 $f: A \rightarrow B$ é
sobrejetiva.

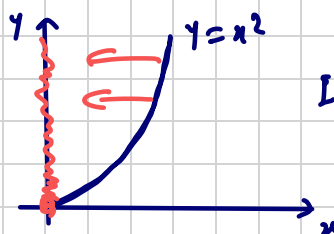


$f: A \rightarrow B$ não é
sobrjetiva.

este elemento
não é imagem de
nenhum elemento de A
pela f .

Ex: a) $f: [0, +\infty) \rightarrow \overset{CD(f)}{[0, +\infty)}$; $f(x) = x^2$
é sobrjetiva?

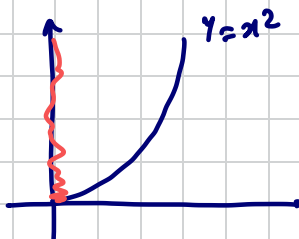
Sim!



$Im(f) = [0, +\infty)$
||
 $CD(f)$

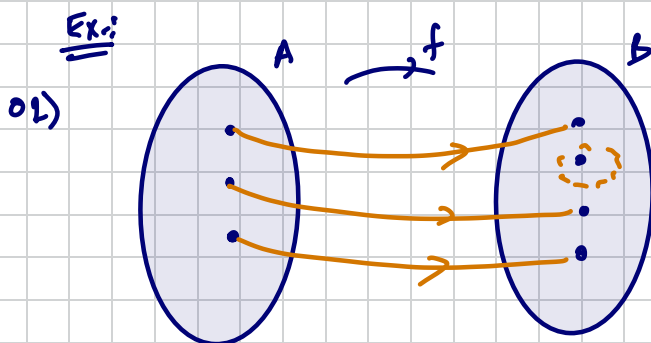
b) $f: [0, +\infty) \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$, $f(x) = x^2$
é sobrjetiva?

Não:



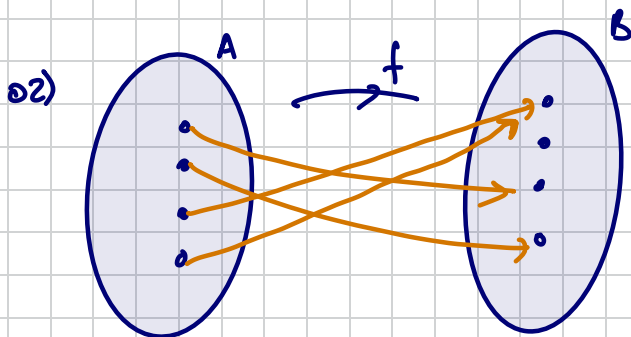
$Im(f) = [0, +\infty)$
x
 $\mathbb{R}$

Def: Dizemos que $f: A \rightarrow B$ é bijetiva se for injetiva e sobrejetiva.



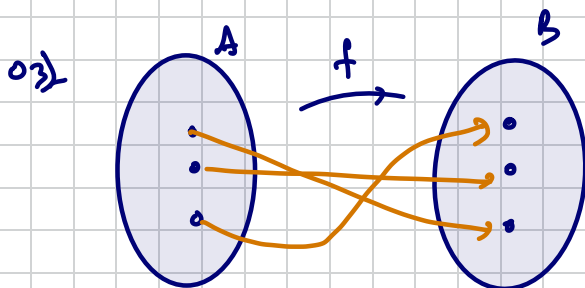
f é injetiva, mas não é sobrejetiva.

Logo, f não é bijetiva.



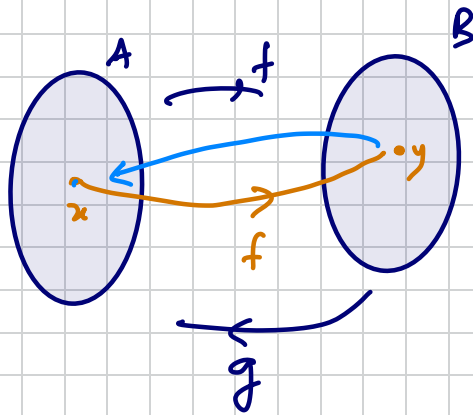
f não é nem injetiva e nem sobrejetiva.

Portanto, f não é bijetiva.



f é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva.

Dado $f: A \rightarrow B$ uma função, que manda $x \in A$ para $y = f(x) \in B$. Seríamos: será possível obter $g: B \rightarrow A$ que faça o caminho contrário, ou seja, dado $y \in B$, $g(y) = x \in A$?



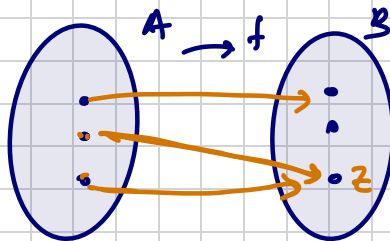
$$y = f(x)$$

$$x = g(y) \text{ .}$$

(existe?)

Se isso acontecer, diremos que $g: B \rightarrow A$ é a inversa de f .

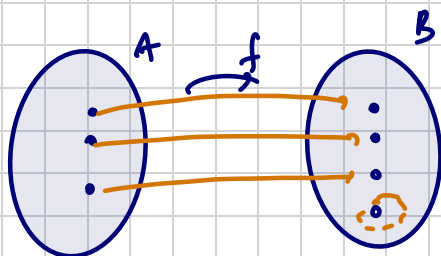
No entanto, se f não for injetora, não existirá a "candidata" à inversa. Por exemplo:



f não é injetora.
Então $g: B \rightarrow A$
levaria $z \in B$
para z lugares,
diferentes em A ,

o que contradiz a def. de função.

Então, $f: A \rightarrow B$ deve ser injetiva. Mas só a injetividade não basta. $f: A \rightarrow B$ também deve ser sobrejetiva.



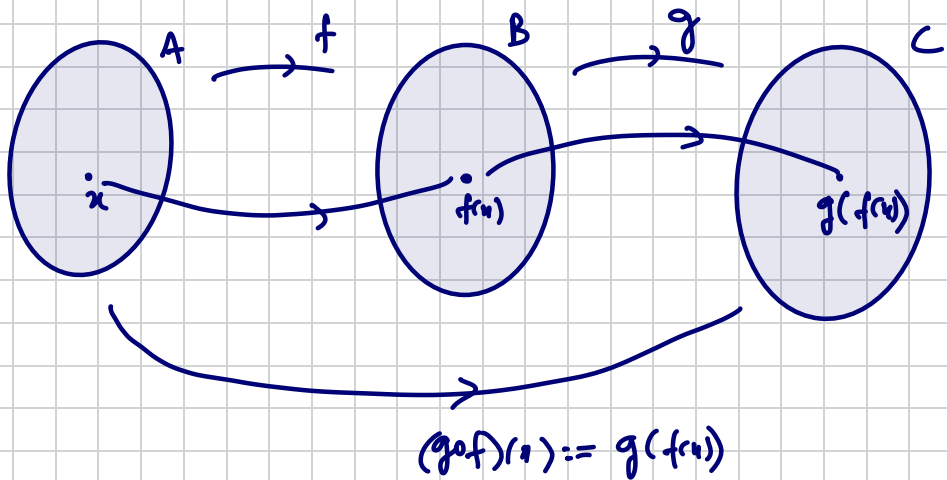
f é injetiva, mas não é sobrejetiva. Logo, não pode existir inversa $g: B \rightarrow A$

Então, para existir a inversa $g: B \rightarrow A$, a função $f: A \rightarrow B$ deve ser bijetiva (injetiva e sobrejetiva)

Def.: Dadas $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$; Definimos

$g \circ f: A \rightarrow C$ por:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$



Ex.: $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+x};$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = x^2 + x.$

$$(-1, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$\xrightarrow{g \circ f}$

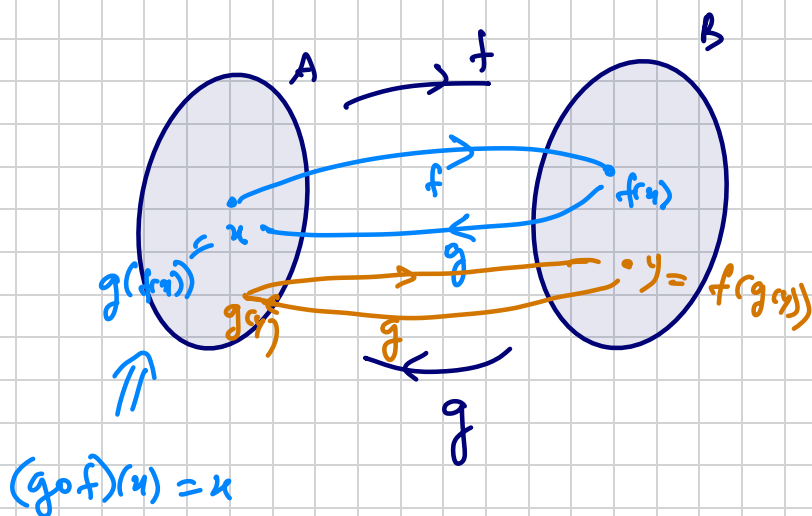
Então:

$$\begin{aligned} \underline{(g \circ f)(x)} &= g(f(x)) = g(\sqrt{1+x}) = (\sqrt{1+x})^2 + \sqrt{1+x} \\ &= \underline{1+x+\sqrt{1+x}} \end{aligned}$$

Se $f: A \rightarrow B$ é injetiva, então $\exists g: B \rightarrow A$ inversa, e não talis que

$$(g \circ f)(x) = x = \text{id}_A(x) \quad \leftarrow$$

$$(f \circ g)(y) = y = \text{id}_B(y)$$



Ou seja; definimos o seguinte conceito:

Def.: Dizemos que $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$ são inversas entre si se, e somente se:

$$\forall x \in A; (g \circ f)(x) = x \quad ;$$

$$\forall y \in B; (f \circ g)(y) = y$$

Frente ao exposto, temos o seguinte resultado:

PROP.: As funções $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$
e $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \log_a x$ são
inversas uma da outra. ($a > 0$ e $a \neq 1$)

DEMONSTR.: De fato, basta notar que:

$$\begin{aligned} \underline{(g \circ f)(x)} &= g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = \\ &= x \cdot \underbrace{\log_a a}_{=1} = x \cdot \underline{1} = x. \end{aligned}$$

e

$$\underline{(f \circ g)(y)} = f(g(y)) = f(\log_a y) = a^{\log_a y} = \underline{y}$$

□

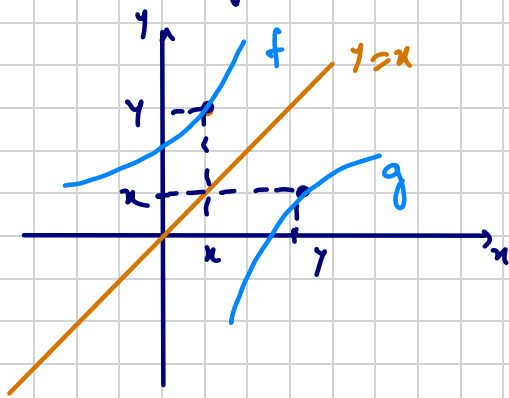
O interessante de se observar consiste nos esboços gráficos de f e de sua inversa (se existir).

Seja $f: A \rightarrow B$ invertível ; o ponto $P(x, f(x))$ pertence ao gráfico de f .

Seja $g: B \rightarrow A$ a sua inversa, o ponto $Q(y, g(y))$ pertence ao seu gráfico, mas $g(y) = x$ e $f(x) = y$ (pois f e g são inversas uma da outra).

Então $P(x, y)$ está no gráfico de f e $Q(y, x)$ (simétrico) está no gráfico da sua inversa.

Outra coisa, tem-se um ESPELHAMENTO gráfico em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares $y=x$:



EX-1

$$y = 2^x$$

2

$$y = \log_2 x$$

✓

$$2^x > 0; \forall x \in \mathbb{R}.$$

→

$$\frac{2^y}{>0} = x \quad (\text{NOT-EXP})$$

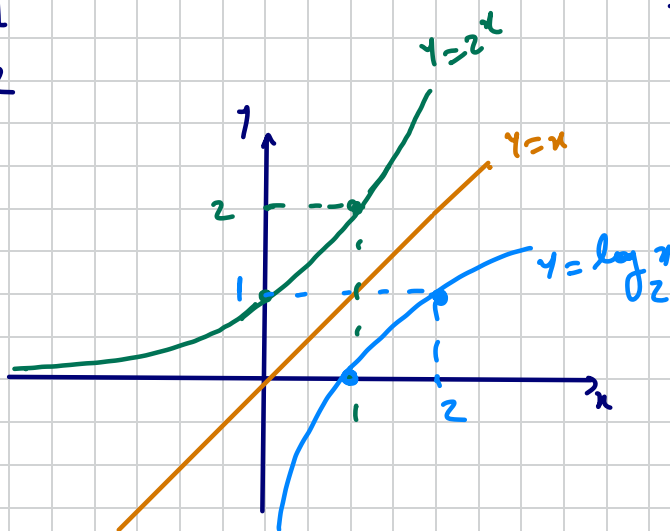
ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $x = 0$

ASSÍNTOTA VERTICAL.

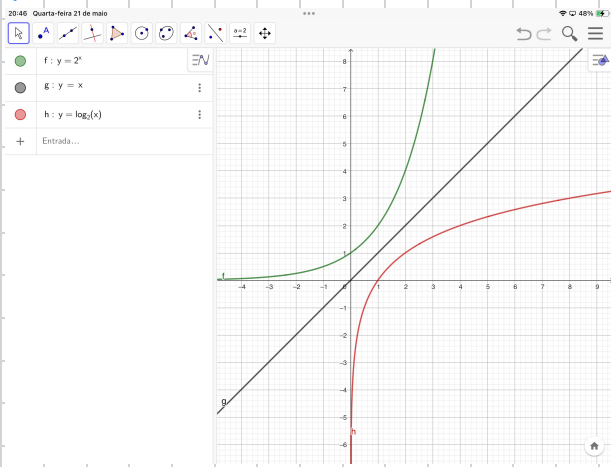
$$x = 0$$

x	$y = 2^x$
0	1
1	2

$x = 2^y$	y
1	0
2	1



PELO
4EQFBRA.



exercício: Esboce o gráfico de $f(x) = 1 - \log_2(x-1)$, indicando domínio e imagem. Justifique que f é invertível, e obtenha a inversa.

solução: $y = 1 - \log_2(x-1)$

Note que $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

$$D(f) = (1, +\infty)$$

Logo, a reta $x=1$ é uma assíntota vertical.

$$y = 1 - \log_2(x-1)$$

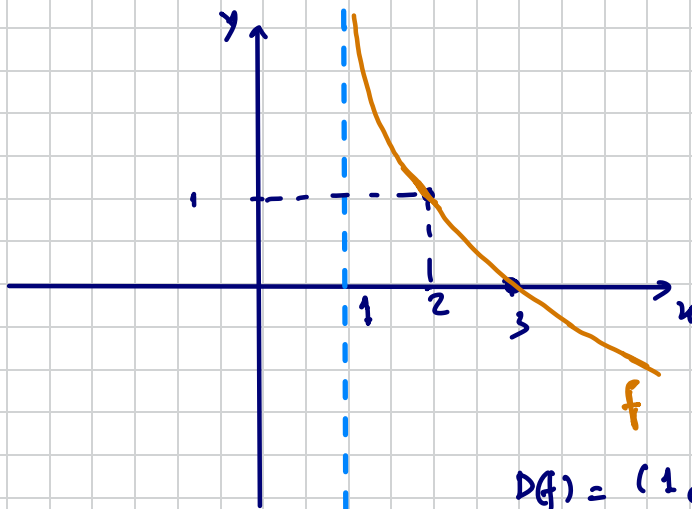
$$y-1 = -\log_2(x-1) \quad (x-1)$$

$$1-y = \log_2(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2^{1-y} = x-1$$

Def.

$$\Leftrightarrow x = 1 + 2^{1-y}$$

$x = 1 + 2^{1-y}$	y
2	1
3	0



$$D(f) = (1, +\infty)$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} \quad (\text{surjetiva})$$

f é também injetiva (pois é decrescente;
logo, domínios diferentes possuem
imagens diferentes)

Logo $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva.

Assim, $\exists g: \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty)$ inversa de f ,
e é tal que $x = g(y)$.

ou seja, de $y = f(x)$, basta isolarmos x

$$y = 1 - \log_2(x-1)$$

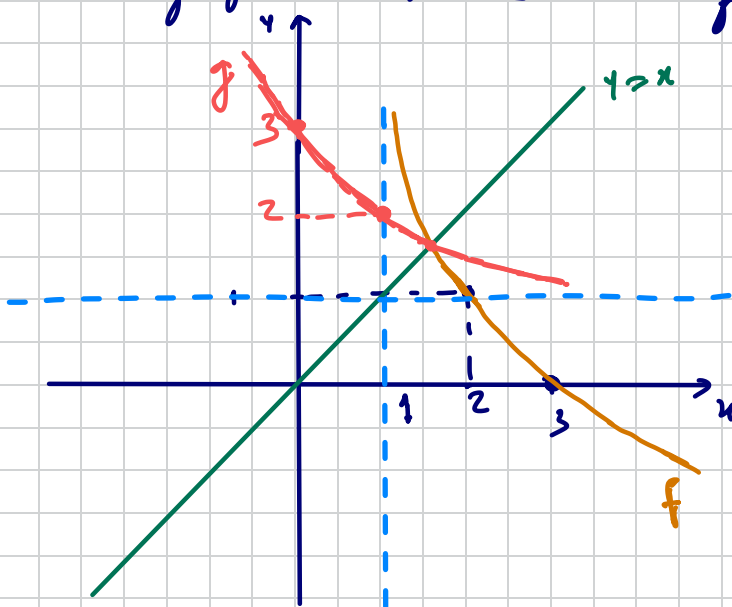
$$\Leftrightarrow y - 1 = -\log_2(x-1) \quad (x-1)$$

$$\Leftrightarrow 1-y = \log_2 (x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-y} = x-1 \Leftrightarrow x = 1 + 2^{1-y}$$

Conclusão: a inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty)$
 será $g(y) = 1 + 2^{1-y}$

Para fazer o esboço gráfico de g , basta espelhar o gráfico de f na bissetriz $y=x$:



Obs: Notação: Se $g: B \rightarrow A$ é inversa de
 $f: A \rightarrow B$, denotamos $g = f^{-1}$.

Representação do problema acima pelo GEOGEBRA.

