FUNÇÕES TRANSCEDENTAIS

07/05/25 – AULA 02

Na aula passada estudamos as funções exponenciais

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = a^x, \text{ onde}$$

exige-se que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Vimos que $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$

e é decrescente se $0 < a < 1$.

Vimos o esboço gráfico da função observando a assíntota horizontal.

Introduzimos também o conceito de equação exponencial, que é toda eq. com incógnita no expoente. Para resolver uma eq. exponencial procuramos estabelecer uma igualdade de mesma base.

Vamos iniciar a aula de hoje resolvendo alguns exemplos de equação exponencial.

Ex.: Resolva em $\mathbb{R}$, cada eq. a seguir.

(a) $4^{x^2-1} = 2^{x^2+x+4}$.

$4 = (2)^2$

$(2^2)^{x^2-1} = 2^{x^2+x+4}$

$2^{2x^2-2} = 2^{x^2+x+4} \iff 2x^2-2 = x^2+x+4$

$\iff \underbrace{2x^2}-2\underbrace{-x^2}-x-4=0$

$x^2-x-6=0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4.6}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2} \quad \begin{cases} x = \frac{1+5}{2} = 3 \\ x = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

Solução: $S = \{-2, 3\}$

(b) $3^{x^2-2x-3} = 1 = 3^0$

$3^{x^2-2x-3} = 3^0 \iff x^2-2x-3=0$

$$\iff x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2 \cdot 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} \nearrow x = \frac{2+4}{2} = 3 \\ \searrow x = \frac{2-4}{2} = -1. \end{cases}$$

$S = \{-1, 3\}.$

03) $9^x + 3^x - 12 = 0.$

Neste caso, não conseguimos obter uma igualdade de mesma base. Porém, podemos, neste caso, efetuar uma mudança de variável, com o intuito de transformar o problema dado em um problema mais simples. Vejamos:

$$9^x + 3^x - 12 = 0 \Leftrightarrow (3^2)^x + 3^x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 + 3^x - 12 = 0 \qquad (*)$$

Escreva $\boxed{3^x = w}$. Então, $(*)$ fica:

$$w^2 + w - 12 = 0$$

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2 \cdot 1}$$

$$w = \frac{-1 \pm 7}{2} \begin{cases} \nearrow & w = \dfrac{-1+7}{2} = 3 \\ \searrow & w = \dfrac{-1-7}{2} = -4. \end{cases}$$

Como $3^x = w$, temos:

- $w = 3$: $3^x = 3^1 \iff x = 1.$
- $w = -4$: $\underbrace{3^x}_{>0,\ \forall x \in \mathbb{R}} = -4$ Absurdo!

conclusão: $S = \{3\}.$

04) $16^{2x+3} - 16^{2x+1} = 2^{8x+12} - 2^{6x+5}$ $\boxed{16 = 2^4}$

$$(2^4)^{2x+3} - (2^4)^{2x+1} = 2^{8x+12} - 2^{6x+5}$$

$$\cancel{2^{8x+12}} - 2^{8x+4} = \cancel{2^{8x+12}} - 2^{6x+5}$$

$$-2^{8x+4} = -2^{6x+5} \qquad (\times -1)$$

$$2^{8x+4} = 2^{6x+5} \iff$$

$$8x+4=6x+5 \Leftrightarrow 8x-6x=5-4$$

$$\Leftrightarrow 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

$$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

---

05) $\sqrt[x]{9^{2x-1}} - \sqrt{3^{x-1}} \cdot \sqrt[x]{3^{2x+1}} = 0$

$$\sqrt[x]{9^{2x-1}} = \sqrt{3^{x-1}} \cdot \sqrt[x]{3^{2x+1}}$$

$$\sqrt[x]{(3^2)^{2x-1}} = 3^{\frac{x-1}{2}} \cdot 3^{\frac{2x+1}{x}}$$

$$3^{\frac{4x-2}{x}} = 3^{\frac{x-1}{2}+\frac{2x+1}{x}} \Leftrightarrow$$

---

obs.:

$$\boxed{\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}}$$

$$a^m \cdot a^w = a^{m+w}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4x-2}{x} = \frac{x-1}{2} + \frac{2x+1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4x-2}{\cancel{x}} = \frac{x(x-1)+2(2x+1)}{2\cancel{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(4x-2) = x^2 - x + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x - 4 = x^2 - x + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{5+1}{2} = 3 \;//$$

ou

$$x = \frac{5-1}{2} = 2 \;//$$

$$S = \{2, 3\}.$$

INEQUAÇÃO EXPONENCIAL: É uma desigualdade com a variável no expoente.

Ex: $2^{x-1} > 8$.

Como resolver uma inequação exponencial?

PROP.: Seja $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ uma ineq. exponencial. Então:

- se $a > 1$;

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Longrightarrow f(x) < g(x)$$

- se $0 < a < 1$, então:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Longrightarrow f(x) > g(x)$$

O mesmo se tivermos as desigualdades $\geq$; $\leq$ ou $>$.

DEMONSTR.: Suponha $a > 1$.

Defina $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = a^x$, onde $a > 1$. Logo, h é crescente.

Assim,

$$a < b \Longrightarrow h(a) < h(b).$$

Em particular; se

$$f(x) < g(x) \Longrightarrow h(f(x)) < h(g(x));$$

ou seja;

$$f(x) < g(x) \Longrightarrow a^{f(x)} < a^{g(x)}.$$

Por transposição;(*) obtemos:

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Longrightarrow f(x) \geq g(x) \quad ; \text{ com } a>1.$$

conclusão: para $a>1$;

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Longrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Analogamente se provam as demais desigualdades.

$\square$

(*) A transposição ou prova transpositiva consiste em observar que:

$$P \Longrightarrow Q,$$

a transpositiva será:

$$\sim Q \Longrightarrow \sim P. \quad , \text{ onde o símbolo}$$

$\sim P$ significa NÃO P; ou seja, a NEGAÇÃO de P.

Vejamos exemplos:

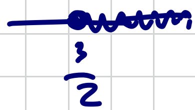
Ex! Resolva as inequações exponenciais:

(a) $4^x \geq 8$.

$$4^x \geq 8 \iff (2^2)^x \geq (2)^3 \iff 2^{2x} \geq 2^3 \iff$$

$a = 2 > 1$

$$\iff 2x \geq 3 \iff \boxed{x \geq \frac{3}{2}}$$



$$S = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

(b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} < \frac{1}{9} \iff \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} < \frac{1}{(3)^2}$

$$\iff \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \iff x+1 > 2 \iff \boxed{x > 1}$$

$0 < a = \frac{1}{3} < 1$

$S = (1, +\infty)$

As funções exponenciais costumam ocorrer em problemas de crescimento ou decrescimento.

Ex-1 A taxa de crescimento de uma população de um determinado país é de aproximadamente 2% ao ano. Se a taxa continuar a mesma, em quantos anos a população desse país vai dobrar?

SOLUÇÃO: $t=0$; $P = P_0$ (POP. INICIAL)

$t=1$; $P = P_0 + \frac{2}{100} P_0$

$$= P_0 \left(1 + \frac{2}{100}\right)$$

$t=2$; $P = P_0\left(1+\frac{2}{100}\right) + \frac{2}{100} P_0\left(1+\frac{2}{100}\right)$

$$= P_0\left(1+\frac{2}{100}\right)\left[1 + \frac{2}{100}\right]$$

$$= P_0\left(1+\frac{2}{100}\right)^2$$

$\vdots$

$t = k \; ; \; P = P_0 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^k$

Ou seja, obtemos a função

$$f(t) = P_0 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t$$

$$f(t) = P_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{50}\right)^t$$

$$f(t) = P_0 \cdot \left(\frac{51}{50}\right)^t$$

Qual o valor de t para que $f(t) = 2 \cdot P_0$

$$2\cancel{P_0} = \cancel{P_0} \cdot \left(\frac{51}{50}\right)^t$$

$$2 = \left(\frac{51}{50}\right)^t$$

EQ. EXPONENCIAL.

Porém, não conseguimos obter uma igualdade de mesma base para seguir na resolução dessa equação.

Precisamos avanços nos estudos para superar esta dificuldade.

Na época das navegações, para cálculos de rotas deviam-se efetuar produtos e divisões de números muito grandes (sem calculadora)

Observou-se que é mais rápido somar do que multiplicar e mais rápido subtrair do que dividir. Considere, como ilustração a tabela:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pot. 2	1	2	4	8	16	$\boxed{32}$	64	128	256	512	1024

$$16 \times 32 = \ ? \quad 512$$

Isto inspirou a noção de logaritmo.

o "logaritmo de 16 + logaritmo 32 = logaritmo 512"

LOGARITMOS:

Def.: Dados $a > 0$ e $b > 0$ e $b \neq 1$. Chama-se logaritmo de a na base b, ao expoente $c \in \mathbb{R}$ ao qual se deve elevar a base b de modo a obter o número $a > 0$.

Simbolicamente:

$$\log_b a = c \overset{def}{\iff} b^c = a.$$

NOTAÇÃO EXPONENCIAL.

Da notação exponencial $b^c = a > 0$; justifica-se que $b > 0$ e $b \neq 1$; e também $a > 0$.

Ex.:

$$2^3 = 8 \; ; \iff \log_2 8 = 3$$

$$3^{-2} = \frac{1}{9} \iff \log_3 \frac{1}{9} = -2$$

PROPOSIÇÃO: Valem as seguintes propriedades, onde $a>0$ e $b>0$ e $b\neq 1$:

01) $\log_b 1 = 0$

02) $\log_b b = 1$

03) $\log_b b^m = m$

04) $\log_b (x.y) = \log_b x + \log_b y$; $x,y>0$

05) $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$; $x,y>0$

06) $\log_b a^m = m.\log_b a$

Obs.: As propriedades 04, 05 e 06 são chamadas de PROPRIEDADE OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS.

DEMONSTR.: 01) $\log_b 1 = 0$?

Escreva $\log_b 1 = x$.

Então; $b^x = 1 = b^0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

conclusão: $\log_b 1 = 0$

02) $\log_b b = 1$:

Escreva $\log_b b = x$. Então, pela definição:

$$b^x = b^1 \Leftrightarrow \boxed{x = 1.}$$

conclusão: $\log_b b = 1$.

03) $\log_b b^m = m$.

Escreva $\log_b b^m = x \Leftrightarrow b^x = b^m \Leftrightarrow x = m$.

conclusão: $\log_b b^m = m$

<u>Ex.</u>: $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

04) $\log_b (x \cdot y) \stackrel{?}{=} \log_b x + \log_b y$

Sejam $\log_b xy = P$; $\log_b x = Q$ e

$$\log_b y = R$$

Vamos mostrar que $P = Q + R$.

De fato:

- $\log_b xy = P \stackrel{\text{def.}}{\iff} \boxed{b^P = x \cdot y}$ $(*)$

- $\log_b x = Q \stackrel{\text{def.}}{\iff} \boxed{b^Q = x}$ $(**)$

- $\log_b y = R \stackrel{\text{def.}}{\iff} \boxed{b^R = y}$ $(***)$

Combinando $(*)$, $(**)$ e $(***)$, obtemos:

$$b^P = x \cdot y = b^Q \cdot b^R = b^{Q+R}$$

$$\Rightarrow b^P = b^{Q+R} \iff P = Q + R;$$

ou seja; mostramos que

$$\boxed{\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}$$

05) $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$ $\quad (y \neq 0)$

Escreva $\log_b \frac{x}{y} = P$; $\log_b x = Q$ e

$\log_b y = R$.

Vamos mostrar que $P = Q - R$. De fato:

- $\log_b \frac{x}{y} = P \overset{\text{def.}}{\iff} b^P = \frac{x}{y}$ $\quad (*)$

- $\log_b x = Q \overset{\text{def.}}{\iff} b^Q = x$ $\quad (**)$

- $\log_b y = R \overset{\text{def.}}{\iff} b^R = y$ $\quad (***)$

Combinando $(*)$, $(**)$ e $(***)$, vem:

$$b^P = \frac{x}{y} = \frac{b^Q}{b^R} = b^{Q-R} \iff P = Q - R$$

Ou seja, mostramos que

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y.$$

06) $\log_b a^m = m.\log_b a$:

Sejam $\log_b a^m = P$ e $m.\log_b a = Q$.

Vamos mostrar que $P = Q$.

De fato;

$$\log_b a^m = P \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \boxed{b^P = a^m} \quad (*)$$

$$m.\log_b a = Q \Longleftrightarrow \log_b a = \frac{Q}{m}$$

$$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \boxed{b^{\frac{Q}{m}} = a} \quad (**)$$

Combinando $(*)$ e $(**)$, vem:

$$b^P = a^m = \left(b^{\frac{Q}{\cancel{m}}}\right)^{\cancel{m}} = b^Q$$

$$\Rightarrow b^P = b^Q \Leftrightarrow \boxed{P = Q}$$

Conclusão: $P = Q \Leftrightarrow \log_b a^m = m.\log_b a$.

$\square$

BASES ESPECIAIS: Quando a base for 10, chamamos de logaritmo decimal, e escrevemos

$$\log_{10} a = \log a$$

Quando a base for o número irracional e (número de Euler, que aparece em várias aplicações na natureza); o logaritmo chama-se LOGARITMO NATURAL ou NEPERIANO. NOTAÇÃO:

$$\log_e a = \ln a.$$

Obs.: $e \approx 2{,}718281828459\,0\ldots$

Vejamos alguns exemplos de aplicações.

Voltemos ao problema da taxa de crescimento:

Tínhamos chegado no ponto:

$$2 = \left(\frac{51}{50}\right)^t$$

Aplicando logaritmo (usaremos o decimal, mas poderia ser com outra base); teremos:

$$\log 2 = \log \left(\frac{51}{50}\right)^t$$

$$\log 2 = t \cdot \log \left(\frac{51}{50}\right)$$

$$\log 2 = t \cdot \left[\log 51 - \log 50\right]$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 51 - \log 50} \text{ anos}$$

$$t \cong \frac{0{,}301029995663981}{1{,}707570176097936 - 1{,}698970004336019}$$

$$t \cong \frac{0{,}301029995663981}{0{,}008600171761917 2}$$

$$t \approx 35{,}0027\ldots$$

$$\underline{t \approx 35 \text{ anos.}}$$

EXERCÍCIO:

Calcule $\log_6 9 + \log_6 4$.

Sol.: $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 (9 \cdot 4)$

$$= \log_6 36 = \log_6 6^2 =$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\log_6 6}_{=1} = 2 \cdot 1 = 2$$