FUNÇÕES TRANSCEDENTAIS

14/05/25 - AULA 03

Iniciamos os estudos de logaritmos na aula passada.

$$\log_b a = c \overset{def}{\Longleftrightarrow} \underbrace{b^c = a}$$

DESSA NOTAÇÃO EXPONENCIAL ENTENDEMOS QUE

$a > 0$ e $b > 0$ e $b \neq 1$.

Vimos várias propriedades importantes dos logaritmos, como:

$$\log_b 1 = 0 \quad ; \quad \log_b b = 1 \; ;$$

$$\log_b x.y = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b a^m = m . \log_b a \, .$$

Mais uma propriedade: $b^{\log_b a} = a$

De fato: Escreva

$$b^{\log_b a} = x$$

Então, aplicando o logaritmo de base b em ambos os lados da igualdade, vem:

$$\log_b b^{\log_b a} = \log_b x$$

Como $\log_b b^{w} = w \cdot \underbrace{\log_b b}_{=1} = w$, então:

$$\log_b b^{\overbrace{\log_b a}^{w}} = \log_b x$$

$$\log_b a = \log_b x \iff \boxed{a = x}$$

CONCLUSÃO: $\boxed{b^{\log_b a} = a.}$

No que segue, apresentamos um exercício que envolverá o uso de logaritmos.

A água de um reservatório evapora à taxa de 10% ao mês. Em quanto tempo ela se reduzirá a $\frac{1}{3}$ do que havia no início?

Solução: Seja V_0 o volume no instante inicial, ou seja:

$$t = 0 \longrightarrow V = V_0$$

$$t = 1 \text{ mês} \longrightarrow V = V_0 - \frac{10}{100} V_0$$

$$= V_0 \left(1 - \frac{1}{10}\right)$$

$$t = 2 \text{ meses} \longrightarrow V = V_0\left(1 - \frac{1}{10}\right) - \frac{\cancel{10}}{\cancel{100}} V_0 \left(1 - \frac{1}{10}\right)$$

$$V = V_0\left(1 - \frac{1}{10}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right)$$

$$V = V_0\left(1 - \frac{1}{10}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$V(t) = V_0\left(1 - \frac{1}{10}\right)^t = V_0\left(\frac{10}{10} - \frac{1}{10}\right)^t$$

$$\Rightarrow V(t) = V_0\left(\frac{9}{10}\right)^t$$ – FUNÇÃO EXPONENCIAL.

Queremos o tempo t para que $v(t) = \frac{1}{3} V_0$.

Ou seja:

$$\frac{1}{3} V_0 = v(t) = V_0 \left(\frac{9}{10}\right)^t$$

$$\frac{1}{3} \cancel{V_0} = \cancel{V_0} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^t$$

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{9}{10}\right)^t \quad (\text{EQ. EXPONENCIAL})$$

Aplicando o logaritmo (no caso decimal, por escolha nossa, poderia ser outra base), obtemos:

$$\log \frac{1}{3} = \log \left(\frac{9}{10}\right)^t$$

$$\underbrace{\log 1}_{0} - \log 3 = t \cdot \left[\log 9 - \overbrace{\log_{10} 10}^{=1}\right]$$

$$-\log 3 = t \cdot (\log 9 - 1)$$

$$\Rightarrow t = \frac{-\log 3}{\log 9 - 1}$$

$$t = \frac{\log 3}{1 - \log 9} \text{ meses.}$$

$t \cong 10,4271727$ meses

$t \cong 10,43$ meses.

$\cong 10$ meses $+ 0,43$ mês
×30

$\cong 10$ mes 13 dias.

MUDANÇA DE BASE:

PROP.: Sejam $a>0$, $b>0$ e $b \neq 1$ e $c>0$ e $c \neq 1$.

Então:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Esta fórmula chama-se FÓRMULA DA MUDANÇA DE BASE dos logaritmos.

DEMONSTRAÇÃO: Escreva $\log_b a = x$

$\log_c a = y$

$\log_c b = z$.

Precisamos mostrar que $x = \frac{y}{z}$

Da def. de logaritmo, obtemos:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \qquad (*)$$

$$\log_c a = y \Leftrightarrow c^y = a \qquad (**)$$

$$\log_c b = z \Leftrightarrow c^z = b \qquad (***)$$

Juntando $(*)$, $(**)$ e $(***)$, vem:

$$b^x = a = c^y \Rightarrow b^x = c^y; \quad \text{[De } (*) \text{ e } (**)\text{]}$$

e como por $(***)$, $b = c^z$, obtemos:

$$(c^z)^x = b^x = c^y \Rightarrow c^{z \cdot x} = c^y$$

$$\Rightarrow z \cdot x = y \Rightarrow \underset{\log_b a}{\underset{\shortparallel}{x}} = \frac{y}{z} = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$\blacksquare$

EXEMPLOS:

Calcular:

(a) $\log_8 128 = ?$

SOL.: $\log_8 128 = \log_8 2^7 = \dfrac{\log_2 2^7}{\log_2 8} =$

$$= \frac{7 \cdot \log_2 2}{\log_2 2^3} = \frac{7 \cdot \overbrace{\log_2 2}^{=1}}{3 \underbrace{\log_2 2}_{=1}}$$

$$= \frac{7}{3}$$

(b) $\log_2 5 \cdot \log_{25} 8 = ?$

$$\log_2 5 \cdot \log_{25} 8 = \log_2 5 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 25} =$$

$$= \log_2 5 \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5^2} = \log_2 5 \cdot \frac{3 \cdot \overbrace{\log_2 2}^{=1}}{2 \cdot \log_2 5}$$

$$= \cancel{\log_2 5} \cdot \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot \cancel{\log_2 5}} = \frac{3}{2}$$ //

02) Encontre o valor de

$$y = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \cdots \cdot \log_{62} 61 \cdot \log_{63} 62 \cdot \log_{64} 63$$

$$= \frac{\overbrace{\log_2 2}^{=1}}{\cancel{\log_2 3}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 3}}{\cancel{\log_2 4}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 4}}{\cancel{\log_2 5}} \cdot \cancel{\cdots} \cdot \frac{\cancel{\log_2 61}}{\cancel{\log_2 62}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 62}}{\cancel{\log_2 63}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 63}}{\log_2 64}$$

$$= \frac{1}{\log_2 64} = \frac{1}{\log_2 2^6} = \frac{1}{6 \cdot \underbrace{\log_2 2}_{=1}} = \frac{1}{6}$$ //

Obs.: Dado $\log_b a = c$;

dizemos que b é a base do logaritmo e $a > 0$ chama-se LOGARITMANDO.

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS:

Uma equação é dita logarítmica quando a incógnita configura-se na base e/ou no logaritmando.

<u>Ex.:</u> $\log_2 (3x-1) = 8$

é uma eq. logarítmica.

Para resolver uma eq. logarítmica precisamos aplicar as propriedades estudadas. Atentamos que é preciso verificar se as soluções obtidas fazem sentido.

Vejamos alguns exemplos:

<u>Ex.:</u> Resolver as equações abaixo:

(a) $\log_3 x = 4$.

<u>Solução:</u> $\log_3 x = 4 \iff 3^4 = x \iff x = 81$.

Note que $81 > 0$. Logo, tem sentido

$\Leftrightarrow \log_3 81$.

$S = \{81\}$.

(b) $\log_2 (9-x^2) = \log_2 (3-x)$

<u>solução</u>: $\log_b a = \log_c c \Leftrightarrow a = c$.

Então:

$$\log_2 (\overbrace{9-x^2}^{>0}) = \log_2 (\overbrace{3-x}^{>0})$$

$$\Updownarrow$$

$$9-x^2 = 3-x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 3 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{+1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$x = \frac{1+5}{2} = 3$

$x = \frac{1-5}{2} = -2$

Como temos $\log_2 (9-x^2) = \log_2 (3-x)$;

- se $x = 3$; teremos $9 - x^2 = 9 - 3^2 = 0$

Então, $x=3$ não tem sentido!

- se $x=-2$, temos:

$\underline{\underline{1º}}$: $9-(-2)^2 = 9-4 = 5>0$

$\Rightarrow \log_2(9-x^2)$ tem sentido

$\underline{\underline{2º}}$: $3-x = 3-(-2) = 3+2 = 5>0$

$\underline{\underline{\text{OK}}}$.

$S = \{-2\}$.

(c) $\log_2 x + 4.\log_2 8 = 16$.

<u>solução</u>: Note que devemos ter $x>0$

$$\log_2 x + 4.\log_2 8 = 16$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 8^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x.8^4 = 16 \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} 2^{16} = x.8^4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2^{16}}{8^4} = \frac{2^{16}}{(2^3)^4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^{16-12} = 2^4 = \underline{\underline{16}}$$

$\Leftrightarrow x = 16 > 0$, logo, é solução.

$$S = \{16\}.$$

(d) $\log_x (2x+5) = 1$.

solução: observe que x deve ser tal que

$$\begin{cases} 2x+5>0 \\ x>0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\log_x (2x+5) = 1 \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} x^1 = 2x+5$$

mas!

$$\Leftrightarrow x - 2x = 5$$

$$\Leftrightarrow -x = 5 \Leftrightarrow \boxed{x = -5 < 0}$$

logo, $S = \emptyset$.

(e) $\log_2 x + \log_2 (x-2) = \log_2 8$.

condição de existência: devemos ter:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x-2>0 \rightarrow x>2 \end{cases}$$

$$\log_2 x.(x-2) = \log_2 8 \Leftrightarrow x(x-2) = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{+2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$x = \frac{2+6}{2} = \boxed{4}$

$x = \frac{2-6}{2} = -2$ X

este não serve pois devemos ter $x>0$ e $x>2$

$S = \{4\}$.

INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS:

São inequações que envolvem a variável em algum logaritmo

EX.: $\log_3 (4x-6) < 0.$

PROP.: Seja a inequação logarítmica geral:

$$\log_b f(x) < \log_b g(x).$$

Então;

- se $b > 1$; segue que $f(x) < g(x)$.
- se $0 < b < 1$, segue que $f(x) > g(x)$.

Resultados análogos para "$\leq$"; "$>$" e "$\geq$"

DEMONSTR.: Se $b > 1$.

Então; se $\log_b f(x) < \log_b g(x)$;

escreva $\log_b f(x) = p$ e $\log_b g(x) = q$.

Então $b^p = f(x)$ e $b^q = g(x)$

Então; como por hipótese

$p < q$; e como $b > 1$;

segue que $b^p < b^q$; ou seja,

$f(x) < g(x)$.

Analogamente se mostra para o caso $0 < b < 1$.

$\square$

Ex.: Resolver as inequações abaixo:

(a) $\log_3 (4x-6) < 0$.

Sol.: $\log_3 (4x-6) < 0 = \log_3 1$

$b = 3 > 1$

$\Rightarrow 4x-6 < 1. \Rightarrow 4x < 7$

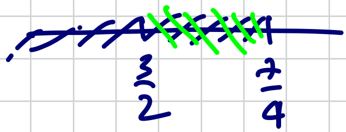
$\Rightarrow x < \dfrac{7}{4}.$

Além disso, devemos impor que

$$4x-6>0 \iff 4x>6$$

$$x > \frac{3}{2}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{2} < \frac{7}{4}$$



$S = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right),$

(b) $\log_2 (7x-2) \leq 6$.

Solução: $\log_2 (7x-2) \leq \log_2 2^6$

Como temos $b = 2 > 1$; segue que

$$7x-2 \leq 2^6$$

$$7x-2 \leq 64$$

$$7x \leq 66 \iff \boxed{x \leq \frac{66}{7}}$$

Também precisamos observar que

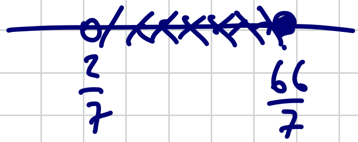
$$7x - 2 > 0 \quad (\text{pois é o logaritmando})$$

$$\Updownarrow$$

$$7x > 2$$

$$\Updownarrow$$

$$x > \frac{2}{7}$$



$$S = \left(\frac{2}{7}, \frac{66}{7}\right].$$

(c) $\log_{\frac{1}{2}}(3+x) + \log_{\frac{1}{2}} 2 > -2$

Solução:

$$\log_{\frac{1}{2}}\big((3+x)\cdot 2\big) > -2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}}(6+2x) > \log_{\frac{1}{2}} 4$$

como $b = \frac{1}{2} < 1$, então:

$$6 + 2x < 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x < 4 - 6$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x < -2 \qquad (\div 2)$$

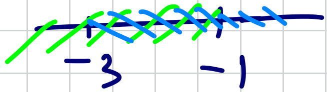
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x < -1.}$$

Além disso, pela condição de existência:

$$3 + x > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x > -3}$$



$S = (-3, -1).$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA:

Def.: Chama-se FUNÇÃO LOGARÍTMICA a função

$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_b x$; onde, $b > 0$ e $b \neq 1$.

Note que, de $y = \log_b x \Leftrightarrow b^y = x$;

e como $b^y > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$ (pois $b > 0$ e $b \neq 1$);

então segue, de fato que $x > 0$.

Então, o domínio de $y = \log_b x$ é o conjunto $(0, +\infty)$. Além disso a reta $x = 0$ (eixo vertical) é uma assíntota vertical.

PROP.: Dada $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_b x$; então, f é crescente se $b > 1$ e decrescente se $0 < b < 1$.

DEMONSTR.: De fato, basta observar que:

$$y = \log_b x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b^y = x \quad , \text{e}$$

a exponencial b^y é cresc. se $b > 1$ e decrescente se $0 < b < 1$. $\square$

Ex.: Esboce os gráficos das funções a seguir, indicando domínio e imagem:

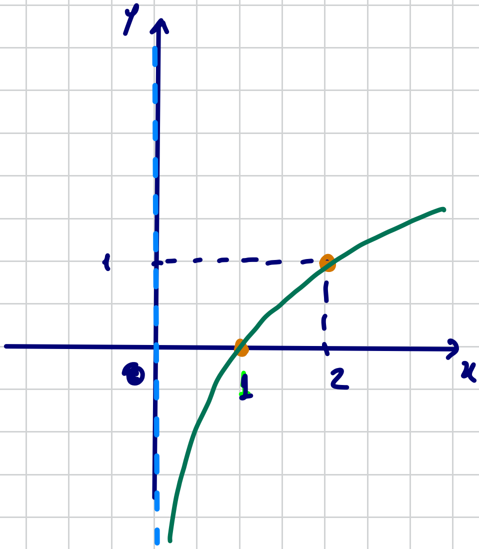
(a) $f(x) = \log_2 x$

Sol.: $x > 0$. $\Rightarrow D(f) = (0, +\infty)$

$x = 0$: ASSÍNTOTA VERTICAL.

$y = \log_2 x \iff 2^y = x$

$x = 2^y$	y
$1 = 2^0$	0
$2 = 2^1$	1



$Im(f) = \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = 1 - 2 \cdot \log_2 (x-1)$

$$y = 1 - 2\log_2 \overbrace{(x-1)}^{>0}$$

$\longrightarrow$ cond. de existência:

$x - 1 > 0$

$x > 1.$

$D(f) = (1, +\infty)$

$\longrightarrow$ $x = 1$ ASSÍNTOTA VERTICAL.

$$y - 1 = -2\log_2 (x-1)$$

$$\frac{y-1}{-2} = \log_2 (x-1)$$

$$\frac{1-y}{2} = \log_2 (x-1)$$

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$2^{\frac{1-y}{2}} = x - 1$$

$$\Longrightarrow x = 1 + 2^{\frac{1-y}{2}}$$

$x = 1 + 2^{\frac{1-y}{2}}$	y
$1 + 2^0 = 2$	1
$1 + 2^{\frac{1+1}{2}} = 3$	-1