

No final de aula passada enunciaremos o teorema fundamental do cálculo (T.F.C):

TFC: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função derivável com f' integrável. Então,

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

obs: Para simplificar a notação, escreva-se:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

DEMONSTRA.: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável com f' integrável.

Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$.

Então; note que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n f(t_i) - f(t_{i-1}) &= \cancel{f(t_2)} - \underbrace{\cancel{f(t_1)}}_{f'(a)} + \cancel{f(t_2)} - \cancel{f(t_1)} + \\
 &+ \cancel{f(t_3)} - \cancel{f(t_2)} + \dots + \underbrace{\cancel{f(t_n)} - \cancel{f(t_{n-1})}}_{= f(b)} \\
 &= f(t_n) - f(t_0) = \underbrace{f(b) - f(a)}.
 \end{aligned}$$

Definam $m_i' = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f'(x)$ e $M_i' = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f'(x)$

Como f é derivável em (t_{i-1}, t_i) e cont. em $[t_{i-1}, t_i]$, pelo T.V.M. segue que $\exists c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

Então, como

$$m_i' \leq f'(c_i) \leq M_i',$$

multiplicando por $t_i - t_{i-1} > 0$, vem:

$$m_i'(t_i - t_{i-1}) \leq f'(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq M_i'(t_i - t_{i-1})$$

Somando de i de 1 até n :

$$\sum_{i=1}^n m_i'(t_i - t_{i-1}) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n f'(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1})}_{\substack{\parallel \\ \sum_{i=1}^n f(t_i) - f(t_{i-1}) \\ = f(b) - f(a)}} \leq \sum_{i=1}^n M_i'(t_i - t_{i-1})$$

Ou seja;

$$\sum_{i=1}^n m_i'(t_i - t_{i-1}) \leq f(b) - f(a) \leq \sum_{i=1}^n M_i'(t_i - t_{i-1}).$$

Tomando o limite com $n \rightarrow \infty$ vem;

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a) \leq \int_a^b f'(x) dx ; e,$$

como f' é integrável (por hipótese), vem que

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

□

ex: $\int_1^4 (x - x^2) dx = ?$

Solucão: Devemos pensar: qual a $f(x)$

tal que $f'(x) = x - x^2$?

Sei ser $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

Então: $\int_1^4 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^4 =$

(T.F.C.)

$$= \frac{(4)^2}{2} - \frac{(4)^3}{3} - \left(\frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^3}{3} \right) =$$

$$= 8 - \frac{64}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 8 - \frac{1}{2} - \frac{63}{3}$$

$$= 8 - \frac{1}{2} - 21 = -\frac{27}{2} //$$

Obs: dando $f'(x) = x - x^2$, usamos

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}; \quad \text{mas poder'ia}$$

$$\text{ter } g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 80.$$

Outro jeito, precisaríamos obter a "antiderivada" mais geral.

LEMA 01: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0, \forall x \in [a, b]$
então, f é uma constante.

DEMONSTRAR: Sejam $x, y \in [a, b]; \quad x < y$.

Considere $f: [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$. Como $f'(x) = 0, \forall x$,
 f é derivável e cont. Logo, pelo T.V.M,
segue que $\exists c \in [x, y]$ tal que

$$0 = f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \iff f(y) = f(x).$$

e isso vale $\forall x, y \in [a, b]$. Ou seja, $f(x) = \text{const.}$

□

LEMA 02: Sejam $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Então, $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$.

DEMONSTRAÇÃO: Defina $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - g(x)$.

Então, h é derivável e vale

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

↑
 $f'(x) = g'(x)$ por hipótese.

$$\Rightarrow h'(x) = 0, \forall x \in [a, b].$$

Então, pelo LEMA 01 segue que $h(x) = k$, onde $k \in \mathbb{R}$. Ou seja,

$$k = h(x) = f(x) - g(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) + k.$$

□

Def.: Digamos que $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma antiderivada de $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se $F'(x) = f(x)$.

prop.: Sejam $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas antiderivadas de $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Então, $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + k$.

Outra seja, se F for uma antiderivada de f , então, a antiderivada mais geral de f será $F(x) + k$, onde $k \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAR: Se $F(x)$ e $G(x)$ são antiderivadas de $f(x)$, então,

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = G'(x)$$

Então, pelo LEMA 2, $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que

$$G(x) = F(x) + k.$$

Def.: Chama-se ANTIDIFERENCIAÇÃO o processo de encontrar antiderivadas. Em símbolos, escrevemos:
sendo $F(x) + K$ a antiderivada mais geral de $f(x)$, então:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + k) = f'(x)$$

$$\Rightarrow d(f(x) + k) = f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int d(f(x) + k) = \int f(x) dx.$$

ANTIDIFERENCIAL OU
ANTIDERIVAÇÃO OU
INTEGRAÇÃO INDEFINIDA.

Inseriremo desenvolver uma série de regras para o cálculo de antiderivadas (i.e, de integrais indefinidas), que corresponde a observar as regras de derivadas "ao contrário".

Sejam $u = u(x)$; $v = v(x)$ e $k, c \in \mathbb{R}$.

Então, vale as fórmulas:

$$01) \int 1 dx = x + c.$$

De fato:

$$\frac{d}{dx}(x+c) = 1 \Rightarrow \int 1 dx =$$

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}(x+c) dx = \int 1 dx$$

$$\int d(x+c) = \int 1 dx$$

$$x+c = \int 1 dx.$$

$$02) \int k \cdot v dx = k \cdot \int v dx.$$

De fato:

$$\frac{d}{dx} \left(k \cdot \int v dx \right) = k \cdot \frac{d}{dx} \int v dx =$$

$$k \cdot v$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(k \cdot \int v dx \right) = k \cdot v$$

$$\Rightarrow k \int n dx = \int k n dx$$

$$03) \int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx.$$

$$04) \int n^k dn = \frac{n^{k+1}}{k+1} + c.$$

De fato:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{n^{k+1}}{k+1} + c \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{k+1} n^{k+1} + c \right)$$

$$\frac{1}{k+1} \cdot (k+1) \cdot n^{k+1-1} + 0$$

$$= n^k.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{n^{k+1}}{k+1} + c \right) = n^k$$

$$\int \frac{d}{dx} \left(\frac{n^{k+1}}{k+1} + c \right) dx = \int n^k dx$$

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} + c = \int n^k dx.$$

Ex.: (a) $\int x^5 dx = ?$ $u=x \rightarrow du=dx$

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

(b) $\int (3x+2)^6 dx = ?$ $\int u^b du$

$$\underline{u=3x+2} \Rightarrow du=3dx$$
$$\hookrightarrow dx = \frac{du}{3}$$

Answer:

$$\int \underbrace{(3x+2)}_u^6 dx = \int u^6 \cdot \frac{1 du}{3} = \frac{1}{3} \cdot \int u^6 \cdot du =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{6+1}}{6+1} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \frac{1}{21} \cdot u^7 + C = \frac{1}{21} \cdot (3x+2)^7 + C$$

$$(c) \int \underbrace{\sqrt[3]{4x+5}}_{= f(u)} dx = ? \quad f(u) = ?$$

$$\int \sqrt[3]{4x+5} dx = \int \underbrace{(4x+5)}_u^{\frac{1}{3}} dx = \int u^k du$$

$$u = 4x+5 \Rightarrow du = 4 \cdot dx \rightarrow du = \frac{du}{4}$$

$$\Rightarrow \int (4x+5)^{\frac{1}{3}} dx = \int u^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{3}} du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot u^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{16} \cdot (4x+5)^{\frac{4}{3}} + C.$$

obs.: Je derivamos obtemos $\sqrt[3]{4x+5}$:

$$\left(\frac{3}{16} (4x+5)^{\frac{4}{3}} + C \right)' = \cancel{\frac{3}{16}} \cdot \cancel{\frac{4}{3}} \cdot (4x+5)^{\frac{4}{3}-1} \cdot 4 + 0$$

$$\frac{1}{4} (4x+5)^{\frac{1}{3}} \cdot 4 = \sqrt[3]{4x+5}.$$

$$c) \int \sqrt[3]{\sin 2x} \cdot \cos 2x dx = ?$$

$$\int \sqrt[3]{\sin 2x} \cdot \cos 2x dx = \int \underbrace{(\sin 2x)^{\frac{1}{3}}}_u \cdot \underbrace{\cos 2x}_{\frac{1}{2} du} dx =$$

$$u = \sin 2x \Rightarrow du = \cos 2x \cdot 2 \cdot dx$$

$$\Rightarrow \cos 2x dx = \frac{1}{2} du$$

$$= \int u^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{3}} du =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} u^{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot (\sin 2x)^{\frac{4}{3}} + C$$



$$(e) \int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx = ?$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx = \int \underbrace{(\arctan x)}_u^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{dx}{1+x^2}}_{du} =$$

$$u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$(f) \int \sqrt[3]{x^2-2x} \cdot (1-x) dx = ?$$

$$\int \underbrace{(x^2-2x)}_u^{\frac{1}{3}} (1-x) dx$$

$$u = x^2-2x \Rightarrow du = (2x-2) dx$$

$$\Rightarrow dr = -2(1-x)dx$$

$$\Rightarrow (1-x)dx = -\frac{1}{2}dr$$

Again, then:

$$\int (x^2 - 2x)^{\frac{1}{3}} (1-x)dx = \int r^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}dr\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int r^{\frac{1}{3}} dr = -\frac{1}{2} \cdot \frac{r^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{r^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot r^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \underline{\underline{-\frac{3}{8} \cdot (x^2 - 2x)^{\frac{4}{3}} + C}}$$