CÁLCULO II

14/05/25 - AULA 06

Na aula passada vimos o conceito de função de Lipschitz: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é dita de LIPSCHITZ se $\exists\, M>0$ tal que $\forall\, x, y \in [a,b]$;

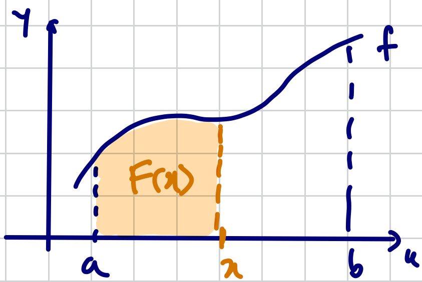
$$|f(x)-f(y)| \leq M.|x-y|.$$

Vimos também que, se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ for Lipschitz, então f é contínua.

__Def:__ Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função integrável. Definimos a função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Quando $f\geq 0$, então $F(x)$ representará a área abaixo do gráfico de f no intervalo $[a,x]$:



PROP.: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Então $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ acima definida é contínua.

DEMONSTR.: Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t).dt \ .$$

Vamos mostrar que F é de Lipschitz. Então, pelo relembrado acima (da aula passada), segue-se a continuidade de F.

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Sejam $x, y \in [a,b]$. Então:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int_a^x f(t)dt + \int_y^a f(t)\,dt \right| = \left| \int_y^a f(t)dt + \int_a^x f(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int_y^x f(t)dt \right| \leq \int_y^x |f(t)|\,dt \ .$$

Como, por hipótese, f é integrável, segue que

f é limitada. Ou seja, $\exists M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a,b].$$

Assim, temos:

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_y^x \underbrace{|f(t)|}_{\leq M} dt \leq \int_y^x M \, dt = M \int_y^x 1 \, dt$$

$$= M(x-y) \leq M \cdot |x-y|$$

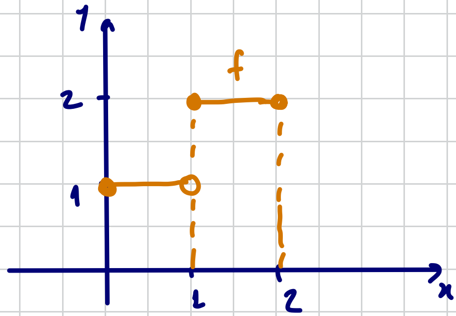
Ou seja, F é de Lipschitz e, portanto, contínua.

$\square$

Ou seja, sendo $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, mostramos que $F: [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é contínua, mesmo que f não seja. Isto estabelece uma REGULARIDADE para F.

Ex.: $f: [0,2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



$F : [0,2] \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \overbrace{f(t)}^{1}\, dt \,, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \displaystyle\int_0^1 \underbrace{f(t)}_{1} dt + \int_1^x \underbrace{f(t)}_{2} dt \,, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \,. \end{cases}$$

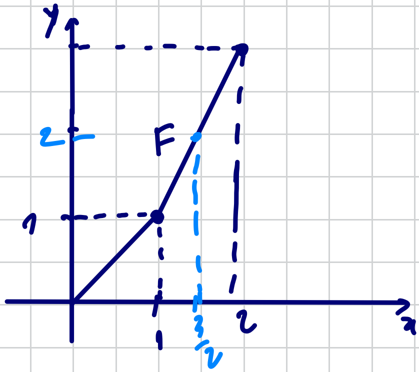
$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^x 1\, dt \;; & 0 \leq x < 1 \\ \displaystyle\int_0^1 1\, dt + \int_1^x 2\, dt \;; & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-0)\cdot 1 \;; & \text{se } 0 \leq x < 1 \,. \\ 1\cdot 1 + 2\cdot(x-1) \;; & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x \,, & \text{se } 0 \leq x \quad 1 \\ 1 + 2x - 2 \,, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

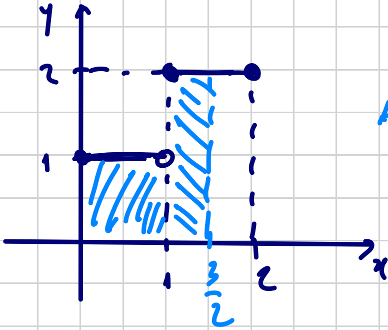
$\Rightarrow F : [0, 2] \to \mathbb{R}$;

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



Ex: $F\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 2$ //

Por outro lado: $F\left(\frac{3}{2}\right)$ é a área no intervalo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ abaixo do gráfico de f.



$$A = 1 \times 1 + \left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdot 2$$

$$= 1 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}$$

$$= 1 + 1 = 2$$ //

PROP.: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável e contínua em $x_0\in[a,b]$. Então F é derivável em x_0, com

$$F'(x_0)=\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)\Bigg|_{x=x_0}=f(x_0)$$

Obs.: Este é conhecido como um primeiro Teorema fundamental do cálculo.

DEMONSTR.: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável em $[a,b]$ e contínua em x_0.

Então, dado $\varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$ tal que, $\forall x,y\in[a,b]$, com $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Em particular para $x=x_0+h$ e $y=x_0$; onde $h\in\mathbb{R}$; temos:

$$|x-y|=|x_0+h-x_0|=|h|<\delta.$$

Então; vamos analisar

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)$$

Precisamos mostrar que esta diferença tende para zero quando $h \to 0$.

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \cdot F(x_0+h) - \frac{1}{h} \cdot F(x_0) - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x_0} f(t)\,dt - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \left(\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \right) - \frac{1}{h} \int_a^{x_0} f(t)\,dt - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \cancel{\frac{1}{h} \int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \cancel{\frac{1}{h} \int_a^{x_0} f(t)\,dt} - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)\, dt \right| = \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)\, dt \right|$$

$$\le \frac{1}{|h|} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| \,.\, dt$$

Como f é contínua, para $|t - x_0| < \delta$, temos $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$, e assim:

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \le \frac{1}{|h|} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} \underbrace{|f(t) - f(x_0)|}_{<\varepsilon}\, dt <$$

$$< \frac{1}{|h|} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon \, dt = \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} 1 \,.\, dt$$

$$= \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot (\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}) \,.\, 1 = \frac{h}{|h|} \cdot \varepsilon = \pm \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Ou seja, mostramos que

$$F'(x_0) = f(x_0) \; ; \text{ onde } \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

$\square$

Exs 01) Dado $F(x) = \displaystyle\int_1^x (\csc^3 t \cdot \ln t)\,dt$

Calcule $F'(x)$.

Solução: $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_1^x \underbrace{(\csc^3 t \cdot \ln t)}_{f(t)}\,dt\right) = f(x)$

$$= \csc^3 x \cdot \ln x.$$

02) Idem para $F(x) = \displaystyle\int_2^{x^2} \operatorname{sen} 4t \, dt.$

$F'(x) = ?$ Escreva $u = x^2$

Então $\dfrac{du}{dx} = 2x$

Disso, temos:

$$F'(x) = \underbrace{\int_2^{u} \operatorname{sen} 4t\, dt}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right) = \operatorname{sen} 4u \cdot 2x$$

$$= \operatorname{sen} 4x^2 \cdot 2x$$

Regra da cadeia

$$F' = F'(u(x)) = F'(u)\cdot u'(x)$$

$\boxed{\text{Lista 02}}$

3. Use o Teorema Fundamental do Cálculo, primeiro formato, para obter a derivada de cada função abaixo:

(a) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3+1}dt$

(b) $F(x) = \int_1^{e^x} \ln t dt$

(c) $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1}dz$

(d) $F(x) = \int_0^{x^4} \cos t dt$

(a) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3+1}\, dt$.

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x^3+1}.$$

(c) $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1}\, dz$

$u = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$\Rightarrow u' = \frac{1}{2} x^{-1/2}$

$$\big(F(u(x))\big)' = F'(u) \cdot u' \qquad \Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\Rightarrow \quad F(u) = \int_1^u \frac{z^2}{z^4+1}\,dt \;\rightarrow\; F'(u) = \frac{u^2}{u^4+1}.$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = F'(u) \cdot u' = \frac{u^2}{u^4+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{(\cancel{\sqrt{x}})^{\cancel{2}}}{(\cancel{\sqrt{x}})^{\cancel{4}}+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x}{2\sqrt{x}(x^2+1)}$$

(b) $F(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \ln t\,dt$

$$u = e^x \Rightarrow u' = e^x$$

$$F(u) = \int_1^u \ln t\,dt$$

$$F'(x) = F'(u(x)) = \underbrace{F'(u)}_{=\ln u} \cdot u' =$$

$$= \ln u \cdot e^x = \ln e^x \cdot e^x =$$

$$= \log_e e^x \cdot e^x = \underbrace{x \cdot e^x}$$

TEOREMA: (TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO – TFC)

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável com f' integrável. Então,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Faremos a demonstração na próxima aula.

Vamos fazer alguns exemplos de uso do T.F.C.

01) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = ?$

Solução: Precisamos pensar qual função f é tal que $f'(x) = x^2$?

Será $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$, pois

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot (3x^2) = x^2$$

Então, c.f. o T.F.C.;

$$\int_0^1 x^2\,dx = f(1) - f(0) = \frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{1}{3}$$

02) $\int_1^5 x^2\,dx = ?$

Novamente, sendo $f'(x) = x^2$, então tomamos $\boxed{f(x) = \frac{x^3}{3}}$ e disso:

$$\int_1^5 \underbrace{x^2}_{f'(x)}\,dx \underset{\text{T.F.C.}}{=} f(5) - f(1) = \frac{(5)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} =$$

$$= \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3}$$

(confronte este cálculo com o realizado por def. na aula 03).

03) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{f'(x)}\, dx = ?$

Então, qual é a função cuja derivada resulta em sen$x$?

$f(x) = -\cos x$ é tal que

$$f'(x) = (-\cos x)' = -(-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x.$$

Assim:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = -\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - (-\cos 0) = 0 - (-1)$$

$$= 1$$