

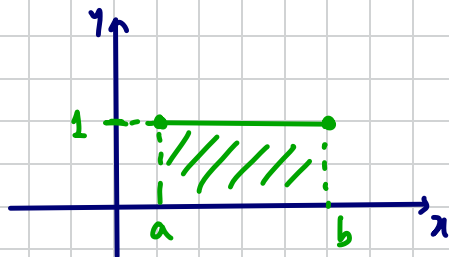
No final da aula veremos algumas propriedades de integral definida. Saltou uma:

(g) Se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis, então $f+g$ é integrável.

Vejam um resultado simples, porém importante:

$$\int_a^b 1 = b-a.$$

Geometricamente, tem-se:



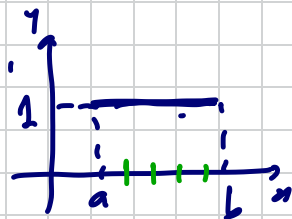
$f \geq 0$. então
 $\int_a^b 1 = \text{área}$
abaixo da
reta $y=1$
em $[a, b]$

Outra seja,

$$\int_a^b 1 = b \times h = (b-a) \cdot 1 = b-a.$$

Seja def. :

$$f(x) = 1.$$



Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ uma partição regular do intervalo $[a, b]$, que divide-o em n subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$, de comprimento

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Analog: $t_0 = a$

$$t_1 = a + \frac{b-a}{n}$$

$$t_2 = a + 2 \cdot \frac{(b-a)}{n}$$

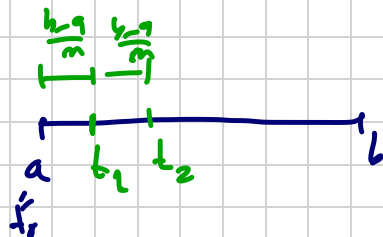
$$t_3 = a + 3 \cdot \frac{(b-a)}{n}$$

$\vdots$

$$t_i = a + i \cdot \frac{(b-a)}{n}$$

$\vdots$

$$t_n = a + n \cdot \frac{(b-a)}{n} = \cancel{a} + \cancel{b-a} = b$$



Note que, em cada $[t_{i-1}, t_i]$, temos

$$M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = 1.$$

Assim,

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^n \underbrace{M_i}_{=1} \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta x = \frac{b-a}{n}} =$$

$$= \sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 1$$

$$= \frac{b-a}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} = b-a.$$

$$\Rightarrow S(f; P) = b-a.$$

Então;

$$\int_a^b 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f; P) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (b-a) = b-a.$$

Do mesmo modo, tem-se

$$\int_a^b 1 = b - a$$

Portanto, f é integrável, e $\int_a^b 1 = b - a$.

Na que segue, façamos algumas questões da

LISTA 01.

1. Apenas pelo esboço gráfico, determine as seguintes integrais definidas:

(a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

(b) $\int_0^2 (x-1) dx$

(c) $\int_1^2 (x+2) dx$

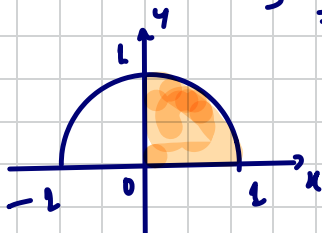
(d) $\int_0^3 |x-2| dx$

(a) Note que $y = \sqrt{1-x^2}$. Elevando ao quadrado:

$$y^2 = 1 - x^2$$

$x^2 + y^2 = 1$ - circunf. centrada na origem e raio unitário

$$\Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} : \text{semi-circunf.}$$

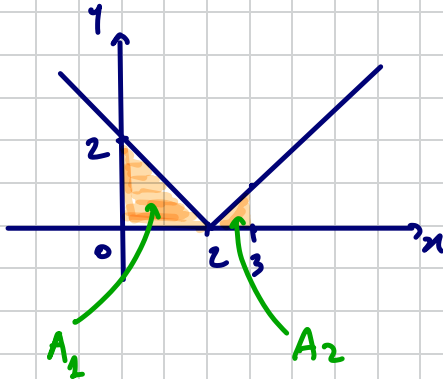


$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4} A_0 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (1)^2 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

$$(d) \int_0^3 |x-2| \cdot dx.$$

$$y = |x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{if } x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & \text{if } x-2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-2, & \text{if } x \geq 2 \\ -x+2, & \text{if } x < 2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \int_0^3 |x-2| dx = A_1 + A_2, \text{ and:}$$

$$A_1 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

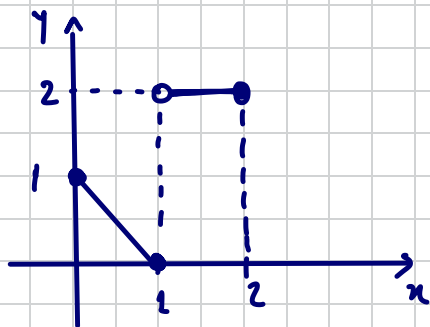
$$A_2 = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^3 |x-2| dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} //$$



3. Idem para $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



Simetricamente; note que

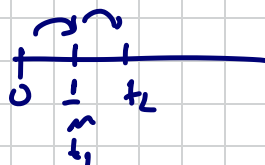
$$\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f.$$

$$\bullet \int_0^1 f = \int_0^1 (1-x) dx$$



Seja P uma partição regular de $[0, 1]$, dividindo o mesmo em n subintervalos de comprimento

$$\Delta x = \Delta t_i = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}.$$



$$t_0 = 0$$

$$t_1 = 0 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$t_2 = 0 + 2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\dots t_i = \frac{i}{n} ; \dots t_n = \frac{n}{n} = 1$$

Como f' decrescente em $[0,1]$, então,

$$M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = f(t_{i-1}) = 1 - t_{i-1} = 1 - \frac{i-1}{n}$$

Assim, montando $S(f; P)$, temos:

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^n M_i \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta x} = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{i-1}{n^2} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n (i-1) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n - \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$\Rightarrow S(f; P) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

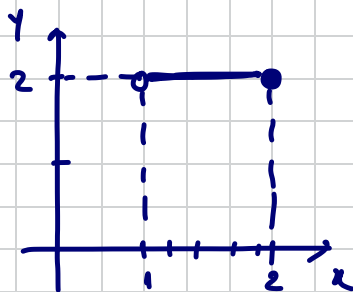
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (i-1) &= 0 + 1 + 2 + \dots + n-1 \\ &= 1 + 2 + \dots + n-1 \\ &= \frac{(1 + (n-1))(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f; P) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$$

Analogamente, temos que $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.

$$\bullet \int_1^2 f = \int_1^2 2$$



Seja $P = \{1 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 2\}$ partição regular que divide $[1, 2]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta t_i = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$.

Como f é constante 2 em $[1, 2]$, então:

$$M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = 2 = m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$$

Assim, temos:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n \underbrace{M_i}_{\frac{2}{n}} \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\frac{1}{n}} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 1 = \frac{2}{n} \cdot n = 2$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$$

Da mesma modo, $\int_1^2 f = 2$

Logo, $\int_1^2 f = 2$. Ser fim:

$$\int_2^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f = \frac{1}{2} + 2 = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$



6. Suponha que f e g sejam integráveis, com $\int_1^9 f = -1$, $\int_7^9 f = 5$ e $\int_7^9 g = 4$. Determine:

(a) $\int_1^9 -2 \cdot f$

(b) $\int_7^9 f + g$

(c) $\int_7^9 3f - 3g$

(d) $\int_9^1 f$

(e) $\int_1^7 f$

$$(a) \int_1^9 -2f = -2 \int_1^9 f = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$(b) \int_7^9 f + g = \int_7^9 f + \int_7^9 g = 5 + 4 = 9.$$

$$(c) \int_7^9 3f - 3g = \int_7^9 3f - \int_7^9 3g = \\ = 3 \cdot \int_7^9 f - 3 \cdot \int_7^9 g = 3 \cdot (5) - 3 \cdot (4) \\ = 15 - 12 = 3$$

$$(d) \int_9^1 f = - \int_1^9 f = -(-1) = 1.$$

$$(e) \int_1^7 f = \int_1^9 f - \int_7^9 f = -1 - (5) = -6 //$$

07) NÃO FAZER (SE QUISE, OK, MAS EU NÃO QUERO...)

9. Se f é integrável e m e M são tais que $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ (i.e., f é limitada em $[a, b]$), mostre que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Note que, como, $\forall x \in [a, b]$, tem-se:

$$m \leq f(x) \leq M;$$

integrando em $[a, b]$, vem:

(prop. (c) das propriedades da int.)

$$\int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M$$

$$\Rightarrow \underbrace{m \int_a^b 1}_{=b-a} \leq \int_a^b f \leq M \underbrace{\int_a^b 1}_{=b-a}$$

; ou seja:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

□



10. Se f é integrável (e então limitada) em $[a, b]$, mostre que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

De fato;

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

propriedade
da integral

; e como f é limitada,
 $\exists \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$

Então; $\forall x \in [a, b]$, temos que

$$|f(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \in \mathbb{R}$$

Ex.:



Assim:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

$$\leq \int_a^b \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \int_a^b 1$$

$$= (b-a) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

11. Use a fórmula

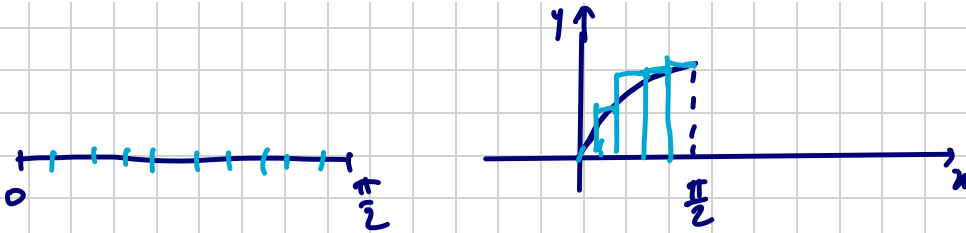
$$\sum_{i=1}^m \sin ih$$

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \dots + \sin mh = \frac{\cos \frac{h}{2} - \cos \left(\left(m + \frac{1}{2} \right) h \right)}{2 \sin \frac{h}{2}}$$

para determinar a área sob a curva $y = \sin x$ de $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{2}$. Faça de duas etapas:

(a) Divida o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ em n subintervalos de igual comprimento (partição regular P) e calcule a correspondente soma superior.

(b) Determine $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f; P)$.



Seja $P = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = \frac{\pi}{2}\}$ uma partição regular que divide $[0, \frac{\pi}{2}]$ em n subintervalos de comprimento

$$\Delta t_i = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{n} = \frac{\pi}{2n}.$$



$$t_0 = 0$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2n}$$

$$t_2 = 2 \cdot \frac{\pi}{2n}$$

$\vdots$

$$t_i = i \cdot \frac{\pi}{2n}$$

$\vdots$

$$t_n = n \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$$

como $y = \sin x$ é crescente em $[0, \frac{\pi}{2}]$, então.

$$M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = f(t_i) = \sin t_i = \sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)$$

Assim:

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i = \frac{\pi}{2m}} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right) \cdot \frac{\pi}{2m} = \frac{\pi}{2m} \cdot \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2m} \cdot \left[\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)}_h + \underbrace{\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2m}\right)}_h + \underbrace{\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2m}\right)}_h + \dots + \underbrace{\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2m}\right)}_h \right] =$$

pela fórmula

$$= \frac{\pi}{2m} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{2m} - \cos \left((n+1) \cdot \frac{\pi}{2m} \right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)} =$$

$$= \frac{\pi}{2m} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{4m} - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4m} \right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4m}\right)}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= \\ &= -\cos \theta \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2m} \cdot \cos \frac{\pi}{4m} - (-\cos \frac{\pi}{4m})}{2 \cdot \sin(\frac{\pi}{4m})}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{m} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{4m}}{2 \sin \frac{\pi}{4m}}}{1} = \frac{\frac{\pi}{2m} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{4m}}{\sin \frac{\pi}{4m}}}{1}$$

$$\Rightarrow S(f; p) = \frac{\pi}{2m} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{4m}}{\sin \frac{\pi}{4m}}$$

$$(b) \lim_{m \rightarrow \infty} S(f; p) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2m} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{4m}}{\sin \frac{\pi}{4m}} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{\pi}{4m}}{2 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4m}}{\frac{\pi}{2m}}} = \frac{\cos 0}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} //$$