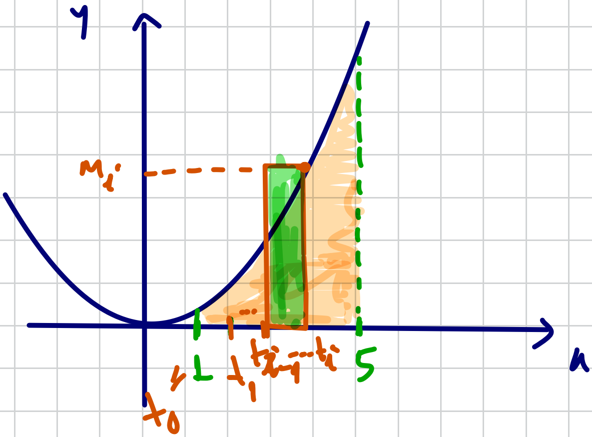
CÁLCULO II

30/04/25 - AULA 03

No que segue, apresentaremos outros exemplos de cálculo de integral definida pela def.:

02) $f: [1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

$$\int_1^5 f = ?$$



Seja P_n uma partição regular que divide $[1, 5]$ em n subintervalos de mesmo comprimento

$$\Delta x = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$$

Assim:

$t_0 = 1$

$t_1 = 1 + \frac{4}{n}$; $t_2 = 1 + 2 \cdot \frac{4}{n}$; ...

$$\dots \boxed{t_i = 1 + i\cdot\frac{4}{n}}; \dots$$

$$\dots \quad t_n = 1 + \cancel{n}\cdot\frac{4}{\cancel{n}} = 5$$

Note que em $[1,5]$ $f(x) = x^2$ é crescente.

Assim, em cada sub-intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, temos

$$M_i = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) = f(t_i) = f\left(1+\frac{4i}{n}\right)$$

$$= \left(1+\frac{4i}{n}\right)^2 = 1 + \frac{8i}{n} + \frac{16i^2}{n^2}$$

Disso, a soma superior de f em relação à partição P_n será:

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\frac{4}{n}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{8i}{n} + \frac{16i^2}{n^2}\right)\cdot\frac{4}{n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{n} + \frac{32i}{n^2} + \frac{64i^2}{n^3}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{32 i}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{64 i^2}{n^3} =$$

$$= \frac{4}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{n} + \frac{32}{n^2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{(*)} + \frac{64}{n^3} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}_{(**)} =$$

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(1+n)\, n}{2}$$

$$(**) \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(se prova por indução)

$$= \frac{4}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} + \frac{\overset{16}{\cancel{32}}}{\cancel{n^2}\, n} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}} + \frac{\overset{32}{\cancel{64}}}{\cancel{n^3}\, n^2} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{\underset{3}{\cancel{6}}}$$

$$= 4 + \frac{16}{n} \cdot (n+1) + \frac{32}{3n^2} \cdot (n+1)(2n+1)$$

$$= 4 + 16 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{32}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= 4 + 16 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{32}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Ou seja, obtemos.

$$S(f;P_n) = 4 + 16.\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{32}{3}.\left(1+\frac{1}{n}\right).\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Tomando o limite quando $n \to +\infty$, teremos:

$$\overline{\int_1^5} f = \lim_{n\to+\infty} S(f;P_n) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 4 + 16.\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right) + \frac{32}{3}\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right).\left(2+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right) =$$

$$= 4 + 16.1 + \frac{32}{3}.1.2$$

$$= 4 + 16 + \frac{64}{3} = \frac{12+48+64}{3}$$

$$= \frac{124}{3} \;//$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\int_1^5} f = \frac{124}{3}}$$

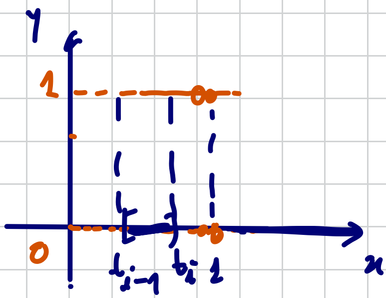
Analogamente se mostra que $\underline{\int_1^5} f = \frac{124}{3}$

Portanto, $\int_1^5 f = \frac{124}{3}$.

03) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(FUNÇÃO DE DIRICHLET)



AF.: f não é integrável; ou seja, $\nexists \int_0^1 f$.

De fato, seja P uma partição qualquer de $[0,1]$.

Então, $P = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1\}$.

Assim:

$$M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = 1 \quad ,$$

e

$$m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = 0 \quad ;$$

devido à densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$.

Dessa forma:

- $\underbrace{S(f;P)} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M_i}_{=1}(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) =$

$= (\cancel{t_1} - \underline{t_0}) + (\cancel{t_2} - \cancel{t_1}) + (\cancel{t_3} - \cancel{t_2}) + \cancel{\cdots} + (\underline{t_n} - \cancel{t_{n-1}})$

$= t_n - t_0 = 1 - 0 = \underbrace{1}.$

$\Rightarrow S(f;P) = 1, \quad \forall P$ partição de $[0,1]$

$\Rightarrow \underbrace{\overline{\int_0^1} f} = \inf_{P \text{ e' part.}} S(f;P) = \underbrace{1}.$

- $s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i}_{=0}(t_i - t_{i-1}) = 0$

$\Rightarrow s(f;P) = 0, \quad \forall P$ partição de $[0,1]$.

Logo: $\underbrace{\underline{\int_0^1} f} = \sup_{P \text{ e' partição}} s(f;P) = \underbrace{0}$

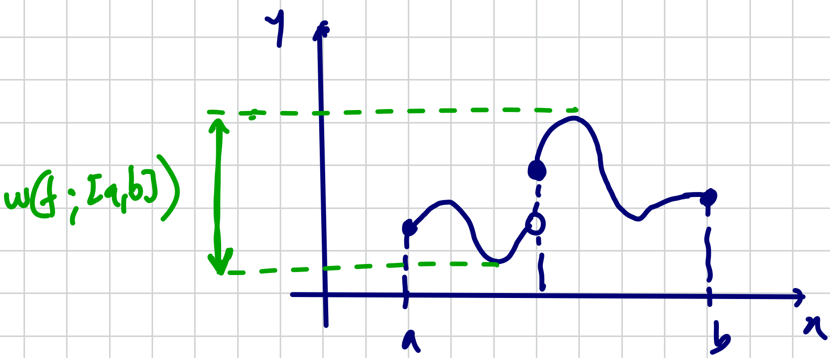
Conclusão:

$$\overline{\int_0^1} f = 1 \neq 0 = \underline{\int_0^1} f \; ;$$

ou seja, f não é integrável.

Def.: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos a oscilação de f em $[a,b]$ por

$$\omega(f;[a,b]) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$



Isto posto, temos o seguinte resultado:

TEOREMA (CRITÉRIO DE DARBOUX de integrabilidade)

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. São equivalentes as afirmações:

(i) f é integrável.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de $[a,b]$, tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$$

(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de $[a,b]$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} w(f;P).(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

DEMONSTR. Já vimos que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) (AULA ANTERIOR). Resta mostrar que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Assim, basta observar que:

$$\sum_{i=1}^{n} w(f;P).(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \right).(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) . (t_i - t_{i-1}) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) . (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) \cdot (t_i - t_{i-1})}_{S(f;P)} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) \cdot (t_i - t_{i-1})}_{s(f;P)}$$

$$= S(f;P) - s(f;P).$$

$\square$

PROPOSIÇÃO: (PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA)

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Então, valem as seguintes propriedades:

(a) $f+g$ é integrável e

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

(b) $\displaystyle\int_a^b k \cdot f = k \cdot \int_a^b f.$

(c) Se $f \geq 0$, então $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$. Em particular, se $f \geq g$, então $\displaystyle\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

(d) $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

(e) $\int_a^b f = -\int_b^a f.$

(f) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad , \forall c \in \mathbb{R}.$

DEMONSTR.:

A demonstração de todas estas propriedades foge de um curso de Cálculo. Porém, podemos, ainda provar os itens (c) e (d)

(c) Seja $f \geq 0$. Considere P uma partição de $[a,b]$.

Então, $s(f;P) \geq 0$, pois $f \geq 0$;

Disso,

$$\underline{\int_a^b} f = \inf_{P \text{ é partição}} s(f;P) \geq 0$$

Como f é integrável, por hipótese, segue que

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \geq 0 \implies \int_a^b f \geq 0.$$

Além disso, se $f \geq g$; então $f - g \geq 0$;
e pela 1ª parte segue que

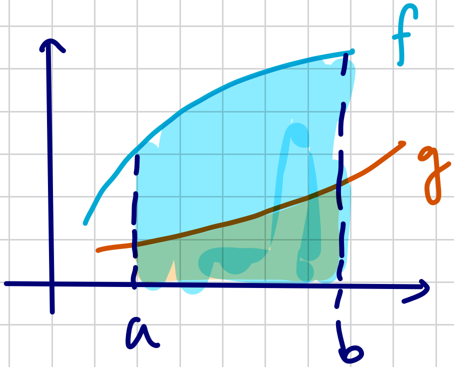
$$\int_a^b f - g \geq 0 \text{ , i.e.;}$$

$$\int_a^b f + (-g) \geq 0 \text{ ; e pelo item (a);}$$

$$\int_a^b f + \int_a^b -g \geq 0 \text{ ; e pelo item (b)}$$

$$\int_a^b f - \int_a^b g \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Isso era de se esperar:



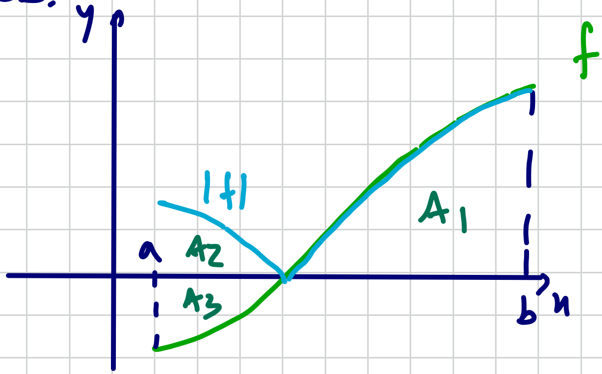
$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

"ÁREA MAIOR"

(Veja o exercício 05 da lista 1 como uma aplicação desta propriedade)

d) $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Ideia geométrica:



$A_1 > 0$; $A_2 > 0$; $A_3 < 0$; e $|A_2| = |A_3|$

$$\underbrace{\left| \int_a^b f \right|} = |A_1 + A_3| \underbrace{\leq} |A_1| + |A_3| = A_1 + A_2$$

$$= \underbrace{\int_a^b |f|}$$

Vejamos a demonstração:

Note que, do estudo de módulos:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Integrando em $[a, b]$, e observando a

propriedade

$$\int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\Rightarrow -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \underbrace{\int_a^b |f|}_{\geq 0}$$

$$\Updownarrow$$

$|x| \leq \alpha$

$\Updownarrow$

$-\alpha \leq x \leq \alpha$

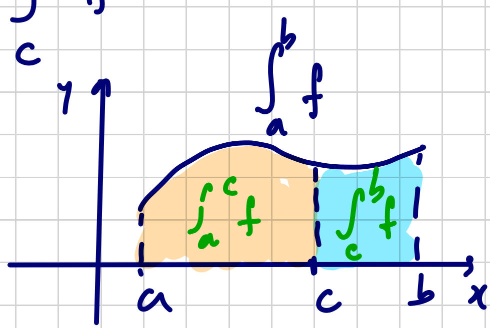
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| .$$

$\square$

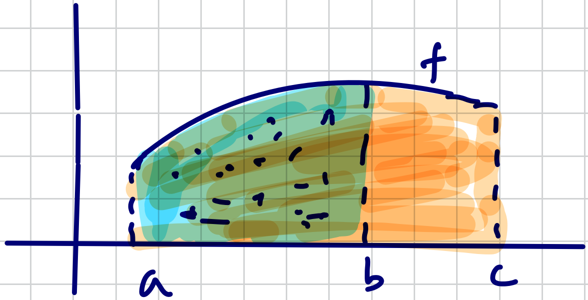
Obs.: Vamos justificar o item (f):

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f .$$

1º caso: $c \in [a,b]$:



2º CASO: $c \notin [a, b]$:



$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f =$$

$$\int_a^c f - \int_b^c f.$$