VARIÁVEIS COMPLEXAS

23/04/25 - AULA 01

PROF. MAURÍCIO ZAHN

wp.ufpel.edu.br/zahn.

O plano de ensino está disponível na página acima.

NÚMEROS COMPLEXOS:

Def.: Um número complexo é um par ordenado (x,y), $x,y \in \mathbb{R}$; pertencente a um conjunto $\mathbb{C}$, tal que tem-se definidas as operações:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$((a,b),(x,y)) \longmapsto (a,b)+(x,y) := (a+x,\ b+y)$$

e

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$((a,b),(x,y)) \longmapsto (a,b)\cdot(x,y) = (a\cdot x - by,\ ay+bx)$$

Estas operações cumprem as seguintes propriedades:

Dados $z_1 = (a_1, b_1)$; $z_2 = (a_2, b_2)$; $z_3 = (a_3, b_3) \in \mathbb{C}$, temos :

A_1 : $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (ASSOCIATIV.)

A_2 : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (COMUTATIV.)

A_3 : $\exists\ 0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 + 0 = z_1$

$0 = (0,0)$ é o neutro aditivo.

A_4 : $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists w \in \mathbb{C}$ tal que

$$z + w = 0$$

(w é o simétrico aditivo de z, e escrevemos $w = -z$)

M_1 : $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ (ASSOCIATIV.)

M_2 : $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (COMUTATIV.)

M_3 : $\exists\ 1 \in \mathbb{C}$ tal que

$$z \cdot 1 = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$1 = (1,0)$. De fato; sendo $z = (a,b)$

$$z \cdot 1 = (a,b) \cdot (1,0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0,\ a \cdot 0 + b \cdot 1)$$
$$= (a,b) = z.$$

(1 é o neutro multiplicativo)

m_4 : $\forall\, z \neq 0$, $\exists\, w \in \mathbb{C}$ tal que

$$z \cdot w = 1$$

(w é o inverso de z)

$z \neq 0 = (0,0)$. Assim, dado $z = (a,b)$, tem-se ou $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Assim, perguntamos: qual é o $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$z \cdot w = 1 \ ?$$ Seja $w = (x,y)$

$$(a,b)\cdot(x,y) = (1,0)$$

$$(a\cdot x - by,\ a\cdot y + b\cdot x) = (1,0)$$

$$\begin{cases} ax - by = 1. & \times(a) \\ ay + bx = 0 & \times(b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2x - \cancel{ab}y = a \\ \cancel{ab}y + b^2x = 0 \end{cases} \ +$$

$$a^2x + b^2x = a$$

$$(a^2+b^2)x = a \longrightarrow \boxed{x = \frac{a}{a^2+b^2}}$$

Além disso:

$$\begin{cases} ax - by = 1 & \times(-b) \\ ay + bx = 0 & \times(a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a\cancel{bx} + b^2y = -b \\ a^2y + a\cancel{bx} = 0 \end{cases} \quad +$$

$$a^2y + b^2y = -b$$

$$y(a^2+b^2) = -b \Rightarrow \boxed{y = \frac{-b}{a^2+b^2}}$$

concluindo: dado $z = (a,b)$; ou $a \neq 0$ ou $b \neq 0$,

o seu inverso será dado por

$$(x,y) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

D: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (DISTRIBUTIVIDADE)

As propriedades $A_1, \ldots, A_4, M_1, \ldots, M_4$ e D tornam $\mathbb{C}$ um corpo.

<u>NOTAÇÃO:</u> Usando $1 = (1,0)$ e $i = (0,1)$, então, dado

$$\underset{\sim}{z} = (a,b) = (a,0) + (0,b) =$$

$$= a\cdot(1,0) + b\cdot(0,1)$$

$$= a\cdot 1 + b\cdot i \;=\; \underset{\sim}{a+bi}$$

$z = a+bi$ é a representação de z na <u>FORMA ALGÉBRICA</u>. (não esquecendo que é um par ordenado)

Ainda, usando dessa notação:

$$\underset{\sim}{i^2} = i\cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\; 0\cdot 1 + 1\cdot 0)$$

$$= (-1,0) = -\underbrace{(1,0)}_{=1} = \underset{\sim}{-1}.$$

$$\Rightarrow \boxed{i^2 = -1}$$

i chama-se UNIDADE IMAGINÁRIA.

Def.: Dado $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, definimos o seu conjugado por $\bar{z} = (a,-b)$.

Na forma algébrica:

$$z = a+bi \Rightarrow \bar{z} = \overline{a+bi} = a-bi$$

Note que a conjugação é idempotente, ou seja

$$\bar{\bar{z}} = z$$

De fato;

$$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a-(-bi)$$

$$= a+bi = z.$$

Proposição. A conjugação goza das seguintes propriedades: dados $z, w \in \mathbb{C}$, então:

(a) $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$;

(b) $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$;

(c) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$;

DEMONSTRAÇÃO: Dados $z = (a,b)$ e $w = (x,y)$, provaremos (b) e (c).

$$\text{(b)} \quad \overline{z\cdot w} = \overline{(a,b)\cdot(x,y)} = \overline{(a\cdot x - by,\ ay+bx)}$$

$$= (ax-by,\ -ay-bx) = (a,-b)\cdot(x,-y) =$$

$$= \overline{(a,b)}\cdot\overline{(x,y)} = \bar{z}\cdot\bar{w}.$$

$$\text{(c)} \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z\cdot\frac{1}{w}\right)} \underset{\text{pelo item (b)}}{=} \bar{z}\cdot\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} \qquad (*)$$

Resta mostrar que $\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{1}{\bar{w}}$.

Como $w = (x,y)$, então,

$$\frac{1}{w} = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Por outro lado; $\overline{w} = (x, -y)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{w}} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-(-y)}{x^2+y^2}\right) = \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}$$

Assim; (*) fica:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

$\square$

POTENCIAS DE i:

Def: Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos as potências de i por:

$$\begin{cases} i^0 = 1 \\ i^n = i^{n-1} \cdot i \end{cases}$$

Já temos: $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$.

Então:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1.$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1.$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot (i) = -i$$

$$\vdots$$

Ou seja, i^n resulta sempre em $1, i, -1, -i$.

Para $m \geq 4$ qualquer, qual é o valor de i^m?

Pelo Algoritmo da divisão de Euclides,

$\exists\, q, r \in \mathbb{N}$ tais que

$$m = 4 \cdot q + r \;;\quad 0 \leq r < 4$$

Assim:

$$i^m = i^{4q+r} = (i^q)^4 \cdot i^r \;;$$

como $i^q = 1, -1, i$ ou $-i$; então

$$(i^q)^4 = 1. \quad \text{(exercício)}$$

Disso:

$$i^m = \underbrace{(i^q)^4}_{=1} \cdot i^r = i^r.$$

Ou seja, provamos o seguinte resultado:

Prop.: Para $n \geq 4$, o valor de i^n é dado por i^r, onde $n = 4q + r$; $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Ex.: $i^{187} = ?$

$$\begin{array}{r|l} 187 & 4 \\ \hline 27 & 46 \\ 3 & \end{array}$$

$$i^{187} = i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

No que segue, vamos mostrar que, num certo sentido, o conj. $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser pensado como um subconjunto de $\mathbb{C}$.

Para isto, define a função

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \text{dada por}$$

$$\varphi(x) = (x, 0),$$

chamada de inclusão.

φ é injetiva, pois:

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow (a,0) = (b,0) \Rightarrow a = b.$$

Além disso, φ é um homomorfismo, pois:

- $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;
- $\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$.

De fato: $\varphi(a+b) = (a+b,0) = (a,0)+(b,0)$

$$= \varphi(a) + \varphi(b) \quad ;$$

e

$$\varphi(a.b) = (a.b,0) = (a,0).(b,0) =$$
$$= \varphi(a).\varphi(b).$$

Além disso, φ manda 0 para $(0,0)$:

$$\varphi(0) = (0,0) = 0$$
$$\varphi(1) = (1,0) = 1$$

Também tem-se que

$\varphi : \mathbb{R} \to \varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$ será isomorfismo.

Isto significa que $\mathbb{R} \sim \varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$, ou seja existe uma cópia isomorfa de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$.

Por isso, podemos escrever:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \underline{\mathbb{R}} \subset \mathbb{C}$$

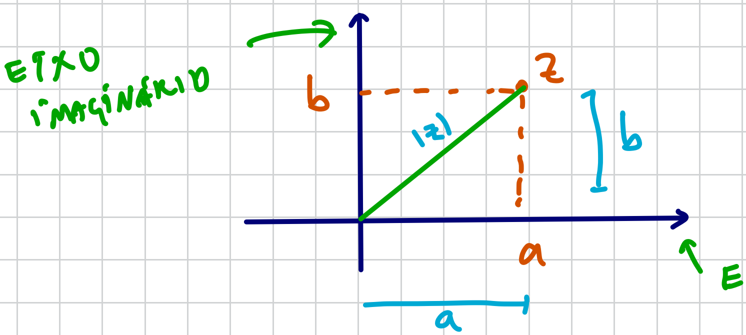
$$\mathbb{R} \sim \varphi(\mathbb{R})$$

<u>Def:</u> Dado $z = (a,b) = a+bi$ um número complexo, definimos o <u>módulo de</u> z por:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Geometricamente, $|z|$ representa a distância de z à origem do plano.

A propósito, o plano onde demarcamos os números complexos chama-se <u>PLANO COMPLEXO</u> ou <u>PLANO DE ARGAND-GAUSS</u>.



T. PITÁGORAS:

$$|z|^2 = a^2+b^2$$

PROPOSIÇÃO: Valem as seguintes propriedades; dados $z, w \in \mathbb{C}$; tem-se:

(a) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(b) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(c) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$; $(w \neq 0)$

(d) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (desigualdade triangular)

(e) $|z - w| \geq |z| - |w|$

DEMONSTR: (para receita).