

Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo II
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios - Integral definida: primeiros conceitos

1. Apenas pelo esboço gráfico, determine as seguintes integrais definidas:

(a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ (b) $\int_0^2 (x-1)dx$ (c) $\int_1^2 (x+2)dx$ (d) $\int_0^3 |x-2|dx$

2. Calcule $\int_0^1 x dx$ diretamente da definição de integral, assumindo que esta integral exista.

3. Idem para $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

4. Seja c um ponto do intervalo $[a, b]$ e α um número real. Mostre que a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x = c \\ 0, & \text{se } x \neq c \end{cases}$$

é integrável, e $\int_a^b f(x) dx = 0$.

5. Justifique por que $\int_0^1 x dx \geq \int_0^1 x^2 dx$ e por que $\int_1^2 x dx \leq \int_1^2 x^2 dx$.

6. Suponha que f e g sejam integráveis, com $\int_1^9 f = -1$, $\int_7^9 f = 5$ e $\int_7^9 g = 4$. Determine:

(a) $\int_1^9 -2 \cdot f$ (b) $\int_7^9 f + g$ (c) $\int_7^9 3f - 3g$ (d) $\int_9^1 f$ (e) $\int_1^7 f$

7. Calcule $\int_{-2}^1 x^4 dx$, usando uma partição regular.

8. Se a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$, definimos o *valor médio* VM de f no domínio $[a, b]$ por

$$VM = \frac{\int_a^b f}{b-a}.$$

Encontre o valor médio para $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

9. Se f é integrável e m e M são tais que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$ (i.e., f é limitada em $[a, b]$), mostre que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

10. Se f é integrável (e então limitada) em $[a, b]$, mostre que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

11. Use a fórmula

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \dots + \sin mh = \frac{\cos \frac{h}{2} - \cos \left(\left(m + \frac{1}{2} \right) h \right)}{2 \sin \frac{h}{2}}$$

para determinar a área sob a curva $y = \sin x$ de $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{2}$. Faça de duas etapas:

- (a) Divida o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ em n subintervalos de igual comprimento (partição regular P) e calcule a correspondente soma superior.
- (b) Determine $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f; P)$.

12. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lipschitz, i.e., $\exists K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

para quaisquer $x, y \in [0, 1]$. Mostre que

$$\left| \int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right| < \frac{K}{2n}.$$

13. Considerando uma partição conveniente do intervalo $[0, 2]$ e utilizando a definição de integral, obtenha as estimativas

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq \int_0^2 \sqrt{x^4 + 2} \, dx \leq 3\sqrt{2} + \sqrt{3}.$$