Cálculo II

23/04/25 - AULA 01

PLANO DE ENSINO EM wp.ufpel.edu.br/zahn.

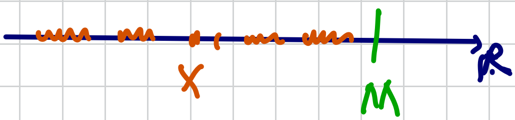
INTEGRAL DEFINIDA:

PRELIMINARES:

Def.: Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Dizemos que X é LIMITADO SUPERIORMENTE se $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \leq M, \quad \forall x \in X.$$

Neste caso, dizemos que M é uma cota superior para o conjunto X.



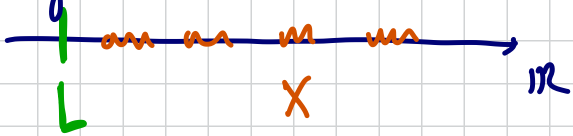
Note que se X possui uma cota superior, então ele possui infinitas cotas superiores.

De fato, se $M \in \mathbb{R}$ é uma cota superior para o conj. X, então $M+1$, $M+2$, $M+3$, ... também são.

Def.: Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é <u>LIMITADO INFERIORMENTE</u> se $\exists\, L \in \mathbb{R}$, tal que

$$x \geq L, \quad \forall\, x \in X.$$

Neste caso, L chama-se uma <u>COTA INFERIOR</u> para o conjunto X.



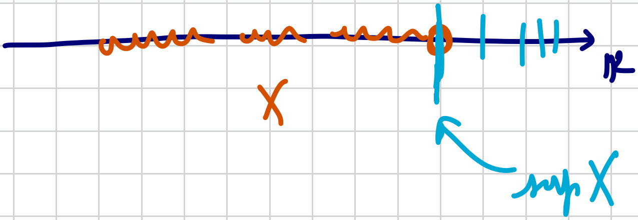
Do mesmo modo que observado na def. anterior, temos que se um conjunto X possui uma cota inferior L, terá infinitas cotas inferiores:

$L-1,\ L-2,\ L-3, \dots$

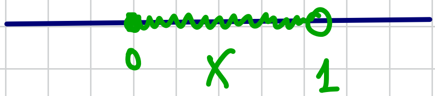
Def.: Dizemos que um conj. $X \subset \mathbb{R}$ é <u>LIMITADO</u> quando for limitado inferiormente e superiormente.

Def.: Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Definimos o <u>SUPREMO do conj X</u> como sendo a menor das cotas superiores.

NOTAÇÃO: $\sup X$.

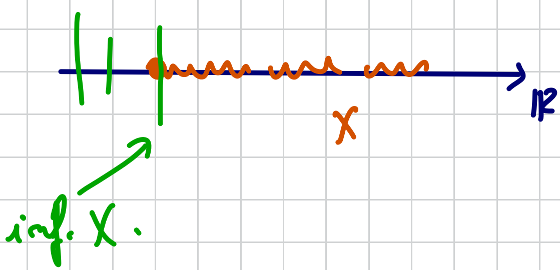


Ex.: $X = [0,1)$.

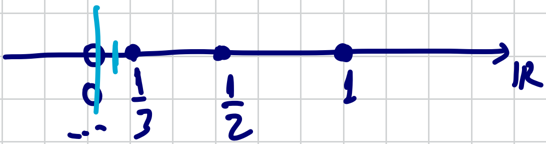


Note que $\nexists$ máx X, mas $\exists \sup X = 1$.

Def.: Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Definimos por ÍNFIMO do conj X como sendo a maior das cotas inferiores, e denotamos por $\inf X$.



Ex. $X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. $\qquad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$



Note que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} > 0$

Então $L = 0$ é uma cota inferior.

e é a maior delas, pois se tomarmos $\delta > 0$ qualquer $0 < \delta < 1$, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \delta$, e $\frac{1}{n_0} \in X$.

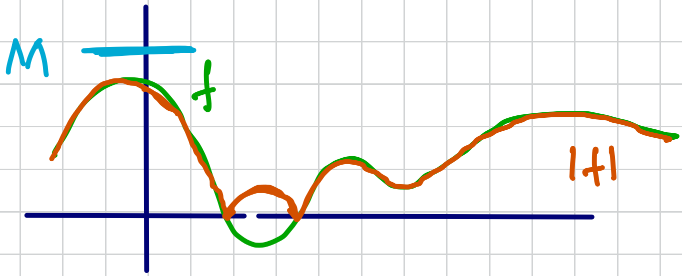
Logo, $0 < \delta < 1$ não serve como cota inferior de X.

Conclusão:

a maior das cotas inferiores de X é 0, i.e., $\inf X = 0$.

Def.: Dizemos que uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é limitada se $\exists\, M > 0$ tal que

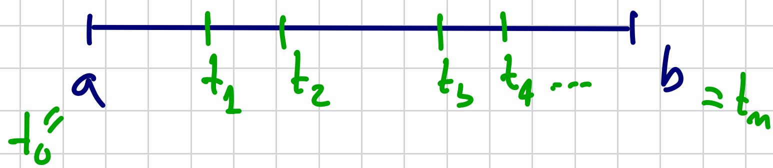
$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X.$$



Def.: Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Definimos a partição de $[a,b]$ como o conjunto

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\},$$

ou seja, uma divisão do intervalo $[a,b]$ em subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.



Def.: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$. Definimos as somas superior e inferior de f em relação à partição P, respectivamente, por:

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

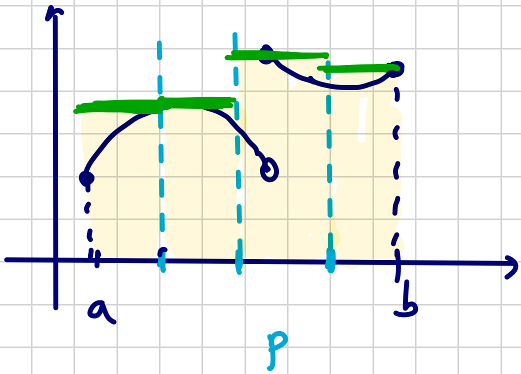
e

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \ ;$$

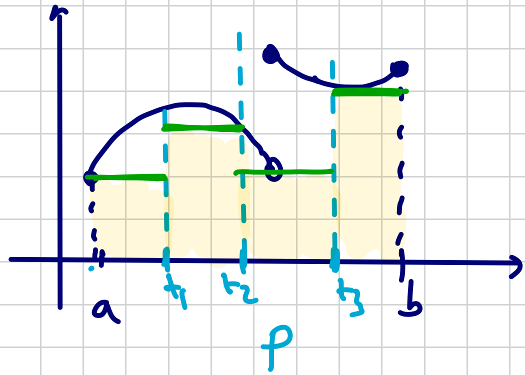
onde $\cdot$ $M_i = \sup\limits_{[t_{i-1}, t_i]} f(x)$ e $m_i = \inf\limits_{[t_{i-1}, t_i]} f(x)$.

Considerando $f \geq 0$ em $[a,b]$ (isso para dar um significado geométrico), então $S(f;P)$ representa uma aproximação, por excesso, da área abaixo do gráfico de f em

$[a,b]$, se $s(f;P)$ representará uma aproximação, por falta, da área abaixo do gráfico de f em $[a,b]$.



$$s(f;P) = M_1 \cdot (t_1 - t_0) + M_2((t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3)$$



$$s(f;P) = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3)$$

Intuitivamente, nota-se que se aumentarmos a quantidade de pontos da partição P original, vamos nos aproximar da área exata.

LEMA 1 Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P uma partição de $[a,b]$. Então,

$$s(f;P) \leq S(f;P).$$

DEMONSTR.: De fato, sendo $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$, então,

$$m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \leq \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = M_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Como $t_i - t_{i-1} > 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, segue que

$$m_i (t_i - t_{i-1}) \leq M_i (t_i - t_{i-1})$$

Somando sob todos os índices, vem:

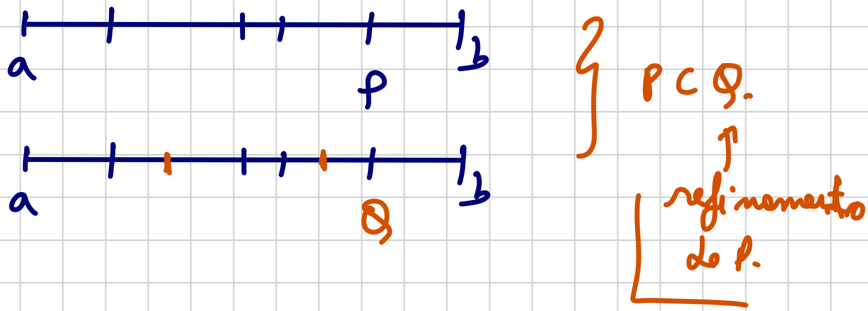
$$\sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow \quad s(f;P) \leq S(f;P)$$

$\square$

Def.: Sejam P e Q duas partições de um intervalo $[a,b]$. Diremos que Q é um refinamento de P se contiver todos os pontos de P e pelo menos mais um ponto, ou seja, se $P \subset Q$.

Neste caso, diremos que Q é mais fino do que P.

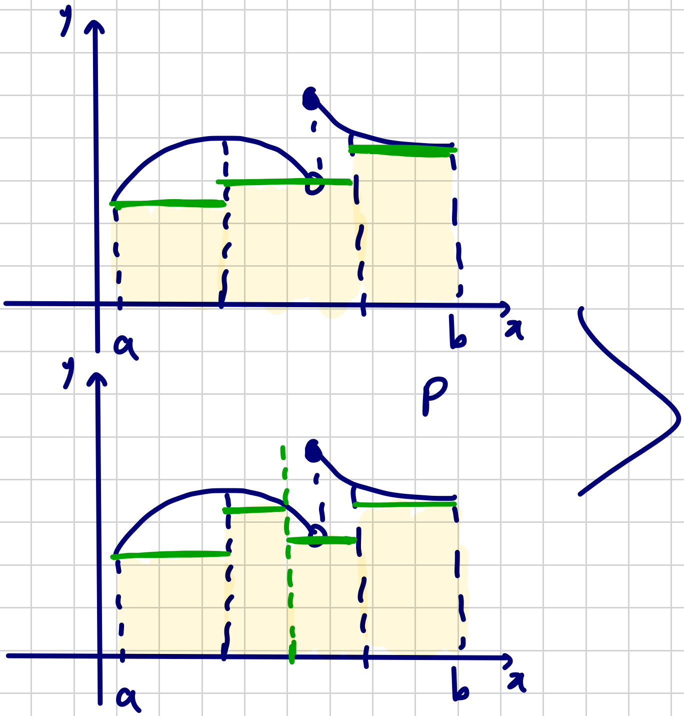


LEMA: Sejam P e Q partições de $[a,b]$, onde Q é refinamento de P. Então:

$$s(f;P) \le s(f;Q) \le S(f;Q) \le S(f;P).$$

[Ou seja, ao fazer um refinamento, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta]

Não demonstraremos, mas sua interpretação é bem geométrica:



$$s(f;P) \le s(f;Q)$$

Q – refinamento de P.

$\square$

LEMA: Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada, P e Q partições de $[a,b]$. Então:

$$s(f;P) \le S(f;Q) \; ;$$

ou seja, qualquer soma inferior é sempre menor ou igual a qualquer soma superior.

Demonstr: De fato, tome $P \cup Q$ é um refinamento para P e para Q, pois
$P \subset P \cup Q$ e $Q \subset P \cup Q$.

Então, pelo lema anterior:

$$s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \leq S(f;P \cup Q) \leq S(f;Q)$$

$\square$

Def. Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Sejam

$$A = \{ s(f;P) : P \text{ é partição de } [a,b] \} \subset \mathbb{R}$$

e

$$B = \{ S(f;P) : P \text{ é partição de } [a,b] \} \subset \mathbb{R}$$

Definimos as integrais inferior e superior de f em $[a,b]$, respectivamente por:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup A = \sup_{\substack{P \text{ é partição} \\ \text{de } [a,b]}} s(f;P)$$

e

$$\overline{\int_a^b} f = \inf B = \inf_{\substack{P \text{ é partição} \\ \text{de } [a,b]}} S(f;P).$$

Def.: Dizemos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada é integrável se, e só se,

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

e este valor comum chama-se INTEGRAL de f em $[a,b]$, e é denotada por

$$\int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$