Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios - Números Complexos

1. Explique o sofisma[1] $-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$, portanto, $-1 = 1$.

2. A *representação matricial* de um número complexo $z = x + iy$ é a matriz $M(z) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$

   Sejam z, w dois números complexos.

   (a) Mostre que M é um homomorfismo do anel dos complexos no anel das matrizes 2×2.

   (b) Mostre que $M(0) = 0_2$, onde 0_2 é a matriz nula 2×2.

   (c) Calcule $M(i)$.

   (d) Mostre que se $z \neq 0$, então $M(\frac{1}{z}) = [M(z)]^{-1}$.

3. Escrever na forma $a + bi$ os seguintes números complexos:

   (a) $(1+i)(1+i^3)(1+i)^{-1}$ (b) $3(7+2i) - ((5+4i)+1)i$

   (c) $[(1-i)^3 + i^{157}](1+i)^{-1}$ (d) $\dfrac{i^{2000} - i^{47}}{1 - 3i^{579}} + \sqrt{-25}$

   (e) $\dfrac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1}$ (f) $(1 + \sqrt{3}\, i)^3$

4. Se $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 3 - 2i$, calcule

   (a) $|3z_1 + 4z_2|$ (b) $(\overline{z_1} - z_2 i)$ (c) $(z_1 \cdot z_2)^{-1}$

5. Demonstre que

   (a) o conjugado do conjugado de z é igual a z.

   (b) o conjugado da soma é igual à soma do conjugado.

   (c) o conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados.

6. Se $z \neq 0$, calcule o conjugado de $\dfrac{1}{z}$.

7. Demonstre que $\mathfrak{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ e que $\mathfrak{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

8. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n$ um polinômio com coeficientes reais. Demonstre que, se w for raiz de $p(z) = 0$, então o conjugado de w também é raiz desta equação.

9. Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz. Dizemos que A é uma *matriz complexa* se as entradas $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Definimos o complexo conjugado de A como sendo a matriz $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$. Pela definição, uma matriz complexa A é *Hermitiana* quando

$$\overline{A} = A^T.$$

   (a) Ache a forma geral de uma matriz 2×2 Hermitiana.

[1] sofisma é o mesmo que paradoxo.

(b) Determine as raízes do polinômio $P_2(t) = \det(A - tI)$. Mostre também que as raízes são reais.

10. Um *número Gaussiano* é um número complexo cujas partes real e imaginária são inteiros. Denotamos por G o conjunto de números gaussianos $G = \{m + ni : m, n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que a soma e o produto de números gaussianos são gaussianos. Ache uma condição necessária e suficiente para que um número gaussiano seja inversível. Ache todos os números inversíveis de G.

11. Dado o número complexo z, mostre que $\Re\mathrm{e}\, z \leq |z|$ e que $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

12. Usando o exercício anterior, prove a proposição a seguir: *"Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se*

    (a) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

    (b) $|z + w| \leq |z| + |w|$"

13. Prove que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|x + yi|$.

14. Prove que $|z|\sqrt{2} \geq |\Re\mathrm{e}(z)| + |\Im\mathrm{m}(z)|$

15. Dados os complexos z e w, prove que

$$\frac{|z+w|}{1+|z+w|} \leq \frac{|z|}{1+|z|} + \frac{|w|}{1+|w|}.$$

16. Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ números complexos. Prove a desigualdade a seguir, conhecida como *desigualdade de Schwarz*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right).$$