

Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática Noturno
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios - Exponenciais e Logaritmos

1. Resolva cada equação abaixo.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} 5^{1-2x} = 25 & \text{(b)} 2^{4x+1} \cdot 8^{-x+3} = \frac{1}{64} & \text{(c)} \left(\frac{1}{5}\right)^{3x} \div 125^{2+x} = 5 \\ \text{(d)} 125 \cdot (0,55555\dots)^x = 729 & \text{(e)} (\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x+1} & \text{(f)} 3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 81^{x+1} \\ \text{(g)} 10^{2x-2} - 11 \cdot 10^{x-1} + 10 = 0 & \text{(h)} 2 \cdot 4^{x+2} - 5 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x+1} = -20 \end{array}$$

2. Resolva as inequações:

$$\text{(a)} \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{27} \quad \text{(b)} 4^{|x+3|} \leq \sqrt{2} \quad \text{(c)} 3^{2x} - 3^{x+1} > 3^x - 3 \quad \text{(d)} \sqrt[3]{7^{|x-5|}} > 343$$

3. Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se a e b são tais que $f(a) = 16f(b)$, pode-se afirmar que:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} a + b = 2 & \text{(d)} a - b = 2 \\ \text{(b)} a + b = 1 & \text{(e)} a - b = 1 \\ \text{(c)} a - b = 3 \end{array}$$

4. Seja f uma função definida por $f(x) = a \cdot 2^x$, sendo a uma constante real. Sabendo que $f(1) = \frac{3}{4}$, determine o valor de $f(3)$.

5. Esboce o gráfico de cada função abaixo, indicando domínio e imagem.

$$\text{(a)} y = 2^{1-2x} \quad \text{(b)} y = 1 - 2^{1-x} \quad \text{(c)} y = 1 + 2^{|x-2|} \quad \text{(d)} y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-|x|}$$

6. (IME - RJ) Dada a função $f(x) = \frac{156^x + 156^{-x}}{2}$, demonstre que

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

7. Use das propriedades dos logaritmos para determinar os valores de:

$$\text{(a)} \log_2 32 \quad \text{(b)} \log 0,0001 \quad \text{(c)} \log_{\frac{1}{3}} 27$$

8. (UFRGS) O valor de $E = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \log\left(\frac{999}{1000}\right)$ é

$$\text{(a)} -3. \quad \text{(b)} -2. \quad \text{(c)} -1. \quad \text{(d)} 0. \quad \text{(e)} 1.$$

9. Sendo $\log_\beta A = 2$, $\log_\beta B = -1$ e $\log_\beta C = \frac{1}{2}$, determine o valor de $\log_\beta \frac{AB^2}{\sqrt[3]{C}}$.

10. Sendo $\log_\beta A = 3$, $\log_\beta B = -1$ e $\log_\beta C = \frac{1}{2}$, determine o valor de $\log_\beta \frac{\sqrt[5]{A^3 B^2 \sqrt{C}}}{\sqrt{A \sqrt[3]{C}}}$.

11. Sendo $a, b, c > 0$, $a, b, c \neq 1$ mostre que $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$, chamada de *fórmula da mudança de base de logaritmos*.

12. Sem usar calculadora, calcule os valores dos logaritmos abaixo:

$$\text{(a)} \log_3 \left(\sqrt[4]{3^5}\right) \quad \text{(b)} \log_2 192 + \log_2 \frac{1}{3} \quad \text{(c)} \log_3 63 - \log_3 7$$

13. Se $\log_b a = \log_a b$, que relação existe entre a e b ?

14. (Mackenzie-SP) Se $\log \alpha = 6$ e $\log \beta = 4$, então $\sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta}$ é igual a:

$$\text{a)} \beta. \quad \text{b)} 24. \quad \text{c)} 10^4. \quad \text{d)} } \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4}. \quad \text{e)} } \sqrt{6}.$$

15. (PUC-SP) Uma calculadora eletrônica possui as teclas das quatro operações fundamentais e as teclas 10^x , \log_{10} e \ln . Como obter o valor de e usando as funções da calculadora?

16. Considerando as aproximações $\log 2 = 0,30$ e $\log 7 = 0,85$, determine:

- (a) $\log 14$ (b) $\log 50$ (c) $\log 3,5$ (d) $\log 0,28$ (e) $\log 25$

17. Se $0 < x \neq 1$, demonstre que

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\log_x 2}.$$

Sugestão: escreva $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

18. Resolva as inequações:

- (a) $\log_3(4x-6) < 0$ (b) $\log_2(x^2+6x) < 4$ (c) $\log_{\frac{1}{2}}(3+x) + \log_{\frac{1}{2}} 2 > -2$

19. Qual é a diferença, se existe, entre as expressões: $\ln(\ln x)$, $\ln^2 x$ e $(\ln x)^2$?

20. (FUVEST) Sobre a equação $(x+3)2^{x^2-9} \log|x^2+x-1| = 0$, é correto afirmar que

- (a) ela não possui raízes reais.
 (b) sua única raiz real é -3 .
 (c) duas de suas raízes reais são 3 e -3 .
 (d) suas únicas raízes reais são -3 , 0 e 1 .
 (e) ela possui cinco raízes reais e distintas.

21. (ITA-SP) Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 números reais tais que $2^{x_1} = 4$, $3^{x_2} = 5$, $4^{x_3} = 6$, $5^{x_4} = 7$, $6^{x_5} = 8$ e $7^{x_6} = 9$. Então, o produto $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$ é igual a

- (a) 6. (b) 8. (c) 10. (d) 12. (e) 14.

22. (ITA-SP) Se $\log_2 \pi = a$ e $\log_5 \pi = b$, então

- (a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$.
 (b) $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$. (d) $\frac{3}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 2$.
 (c) $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{3}{2}$. (e) $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

23. (ITA-SP) Se os números reais a e b satisfazem, simultaneamente, as equações

$$\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \ln(a^2+b) + \ln 8 = \ln 5,$$

um possível valor de $\frac{a}{b}$ é

- (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (b) 1. (c) $\sqrt{2}$. (d) 2. (e) $3\sqrt{2}$.

24. Esboçar o gráfico de cada função cuja lei é dada em cada item a seguir, indicando domínio e imagem.

- (a) $f(x) = 1 + 2^{x-1}$ (b) $f(x) = |1 - 2^{x-1}|$
 (c) $f(x) = \log_2(x-3)$ (d) $f(x) = 1 - 2\log_2(1-x)$
 (e) $f(x) = |1 - \log_{\frac{1}{2}}(x+2)|$ (f) $f(x) = 1 + \ln(x-2)$

25. Obtenha o domínio máximo Ω da função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 7x^3 + \sqrt{x}}{3x-6} + \ln(x^2-4x) - \pi^{1-x}$

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3x^2}}{2-x} + 3\log_{2+x}(x-1) - \frac{7}{\sqrt{x}}$.

$$(c) f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2x+4}} - \ln \sqrt{x+1}$$

26. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 2)$ dada por $f(x) = 2 - 2^{1+x}$. Obtenha f^{-1} e construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1} , indicando domínio e imagem de cada uma.
27. (UFPel-RS) *Ondas sísmicas so vibrações provocadas por terremotos que acontecem na Terra. Sismógrafos são aparelhos que gravam tais vibrações, usando traços em ziguezague que mostram a variação de amplitude dos terremotos. A duração, a localização e a magnitude de cada fenômeno podem ser determinadas por estes aparelhos, instalados em estações sismológicas, em todo o mundo.*

A escala Richter foi desenvolvida por Charles F. Richter, em 1935, no Instituto Tecnológico da califórnia, EUA, para comparar dados e efeitos dos abalos sísmicos.

Richter usou a fórmula abaixo para determinar uma escala para a medição da força dos terremotos:

$$M = \log A + 3 \log(8\Delta t) - 2,92,$$

em que M é a magnitude do terremoto (o que originou a tabela Richter), A é a amplitude (em milímetros) do terremoto, medida em um sismógrafo, e Δt é o intervalo (em segundos) entre as ondas superficial e de pressão máxima, também medidas no sismógrafo.

MARCONDES, G.S. *Matemática*.
São Paulo: Ática, 2003 [adaptado]

Com base no texto acima, diga qual é a amplitude, em milímetro, de um terremoto cuja magnitude assume o valor de 2,3731 - que, segundo a tabela de Richter, não é sentido, mas gravado -, sabendo que o intervalo de tempo entre as ondas superficial e de pressão máxima é de 4 segundos (Considere $\log 3 = 0,4771$ e $\log 6 = 0,7781$).

28. As indicações R_1 e R_2 , na *escala Richter*, de dois terremotos estão indicados pela fórmula

$$R_1 - R_2 = \log \frac{E_1}{E_2},$$

onde E_1 e E_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre.

A tabela abaixo mostra algumas medidas, onde alguns dados estão faltando. Complete a tabela, de acordo com as definições dadas e seus conhecimentos.

| R_1 | R_2 | E_1 | E_2 |
|-------|-------|-------|-------|
| 8 | 6 | 10 | |
| 5 | 7 | | 13 |
| | 9 | 2 | 20 |
| 7 | 7 | 10 | 10 |

29. Uma pessoa deposita uma quantia em um banco que remunera à taxa de 0,8% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada dobrará?
30. Um cartão de crédito cobra juros de 9% ao mês sobre o saldo devedor. Um usuário desse cartão tem um saldo devedor de 505,00 reais. Em quanto tempo essa dívida chegará a 1000,00 reais se não for paga?
31. Estima-se que a população de uma cidade cresça 2% a cada 5 anos.
- (a) Qual é o crescimento estimado para um período de 20 anos?
- (b) E em um período de t anos?

32. As bactérias em um recipiente se reproduzem de forma tal que o aumento do seu número em um intervalo de tempo de comprimento fixo é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo. Suponhamos que, inicialmente, haja 1000 bactérias no recipiente e que, após 1 hora, este número tenha aumentado para 1500. Quantas bactérias haverá cinco horas após o início do experimento?
33. Qual é a *meia vida*¹ de um material radioativo que sofre desintegração de 20% de sua massa em um período de 1 ano?
34. Um fármaco (remédio) tem a meia-vida de 6 horas e as concentrações mínima eficaz e máxima tolerada no corpo humano são respectivamente 210 e 680 microgramas por mililitro. Qual é a dosagem indicada para esse fármaco e em que intervalo de tempo deve-se repetir a dosagem?
35. (VUNESP) O acidente do reator nuclear de Chernobyl, em 1986, lançou na atmosfera grande quantidade de Sr_{38}^{90} radioativo, cuja meia-vida é de 28 anos. Supondo ser este isótopo a única contaminação radioativa e sabendo que o local poderá ser considerado seguro quando a quantidade de Sr_{38}^{90} se reduzir, por desintegração, a $\frac{1}{16}$ da quantidade inicialmente presente, o local poderá ser habitado novamente a partir do ano de
- (a) 2014 (b) 2098 (c) 2266 (d) 2986 (e) 3000
36. Em uma caverna da França, famosa pelas pinturas feitas por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade de C^{14} era 0,145 vezes a radioatividade num pedaço de carvão feito hoje. Calcule a idade do carvão e dê uma estimativa para a época em que as pinturas foram feitas (Obs.: A meia vida do C^{14} é 5730 anos).
37. Um quadro de Vermeer (1632-1675) ainda contém 99,5% de seu carbono-14 (meia vida de 5730 anos). A partir dessa informação, você pode determinar se o quadro é ou não falsificado? Justifique.
38. Nos Jogos olímpicos de 1968, nos arredores da Cidade do México, houve muita discussão a respeito do efeito que a grande altitude (2237 metros) poderia causar aos atletas. Presumindo que a pressão atmosférica decaia exponencialmente em 0,4% a cada 30 metros, a qual percentual fica reduzida a pressão atmosférica ao se deslocar do mar até a Cidade do México?

¹Nos processos radioativos, meia-vida ou período de semidesintegração de um radioisótopo é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa deste isótopo, que pode ocorrer em segundos ou em bilhões de anos, dependendo do grau de instabilidade do radioisótopo. Ou seja, se tivermos 100kg de um material, cuja meia-vida é de 100 anos, depois desses 100 anos, teremos 50kg deste material. Mais 100 anos e teremos 25kg e, assim, sucessivamente.