FUNÇÕES TRANSCEDENTAIS.

PROF. MAURÍCIO ZAHN

30/04/25 – AULA 01

Nesta disciplina estudaremos as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

O material pdf da aula, datas das provas, plano de ensino, et cetera, serão postados na página wp.ufpel.edu.br/zahn.

FUNÇÃO EXPONENCIAL.

Def.: Chama-se função exponencial a função

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, onde devemos impor que $a > 0$ e $a \neq 1$.

E por quê devemos impor $a>0$ e $a \neq 1$?

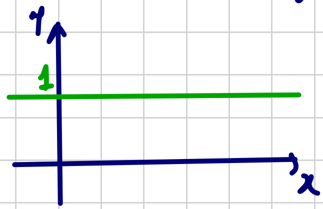
De fato, basta notar que:

- se $a = 1$: teríamos $f(x) = 1^x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Obs: $\forall$: PARA TODO ; QUANTIFICADOR UNIVERSAL.

(no sentido de "qualquer que seja")

Então, $f(x) = 1^x = 1$ é uma função constante.



Logo, não é uma função exponencial $y = a^x$.

- se $a = 0$, teríamos:

$$f(x) = 0^x = \begin{cases} 0, \text{ se } x > 0 \\ \text{indeterminado, se } x = 0 \quad (*) \\ \nexists \text{ se } x < 0. \quad (*) \end{cases}$$

(*) De fato, $0^0 = 0^{m-m}$, onde $m > 0$,

e então, $0^0 = 0^m \cdot 0^{-m} = \dfrac{0^m}{0^m} = \dfrac{0}{0}$,

que é indeterminado.

(*) $\nexists\ 0^x$, se $x < 0$; pois, por exemplo, se $x = -1 < 0$, teríamos:

$$0^x = 0^{-1} = \frac{1}{0^1} = \frac{1}{0} = \nexists.$$

• se $a<0$; a expressão pode não ter sentido para certos valores de $x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, considere o caso com $a=-2<0$.

Então, tem-se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$f(x) = (-2)^x;$$

deve valer $\forall x \in \mathbb{R}$. Porém, em particular, se tomarmos $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Neste caso, teríamos:

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = (-2)^{1/2} = \sqrt{(-2)^1} = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}.$$

Por isso, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ tem sentido se, e somente se, $a>0$ e $a \neq 1$.

Obs.: Usaremos algumas notações importantes.

$\exists$: existe (quantificador existencial)

$\forall$: para todo (quantificador universal)

$P \Rightarrow Q$: se P, então Q.

(ou seja, se vale a hipótese P, então segue a tese Q)

(CONDICIONAL)

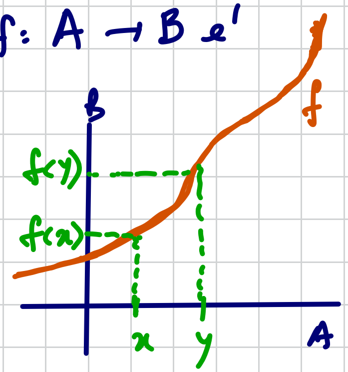
$P \Leftrightarrow Q$: P se, e somente se, Q.

(BICONDICIONAL)

No que segue, apresentaremos um importante resultado referente ao crescimento ou decrescimento da função exponencial. Para isto, lembremos desses conceitos:

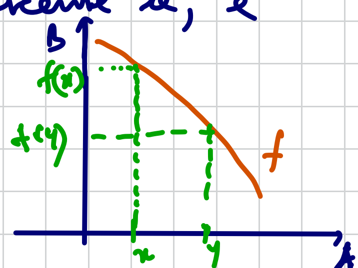
Def.: Dizemos que uma função $f: A \to B$ é crescente se, e somente se,

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$



Dizemos que $f: A \to B$ é decrescente se, e somente se,

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$



PROPOSIÇÃO: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ uma função exponencial.

Então;

(i) se $a > 1$, f é crescente;

(ii) se $0 < a < 1$, f é decrescente.

DEMONSTRAÇÃO:

(i) Suponha que $a > 1$. A mostrar: f é crescente. Então, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, precisamos mostrar que $f(x) < f(y)$.

Como $x < y$, então, $\exists\, m > 0$ tal que

$$x + m = y$$

Por absurdo, suponha que $f(x) < f(y)$ seja falso; ou seja, suponha que $\underbrace{f(x)}_{= a^x} \geq \underbrace{f(y)}_{= a^y}$.

Então:

$$a^x \geq a^y$$; e disso:

$$a^x - a^y \geq 0$$; e como $y = x + m$,

segue que

$$a^x - a^{x+m} \geq 0$$; ou seja ;

$$a^x - a^x \cdot a^m \geq 0$$

$$\underbrace{a^x}_{>0} \cdot (1 - a^m) \geq 0 \qquad (I)$$

como $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (exercício (*)), então,

de (I) concluímos que $1 - a^m \geq 0$

$$\Rightarrow \quad 1 \geq a^m$$, ou seja ;

$$a^m \leq 1$$, com $m > 0$ e $a > 1$.

(Absurdo!)

Logo, é falso que $f(x) \geq f(y)$, ou seja,

tem-se que $f(x) < f(y)$, sempre que $x < y$,

isto é, f é crescente, provando o item (i).

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO DEIXADO ACIMA.

(*) $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De fato; • se $x = 0$; temos

$$a^0 = 1 > 0$$

• se $x > 0$; temos

$$a^x > 0, \text{ para } a > 0 \text{ e } x > 0$$

• se $x < 0$; temos $-x > 0$, e disso:

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} > 0$$

(ii) Seja $0 < a < 1$. Vamos mostrar que $f(x) = a^x$ é decrescente.

$$\boxed{x < y \Rightarrow f(x) > f(y)}$$

Basta notar que, sendo $0 < a < 1$, tomando os seus inversos, temos:

$$\frac{1}{a} > 1$$

Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$; $\frac{1}{a} > 1$.

Logo, g é crescente, ou seja, estamos

no caso (ii), e desse caso segue que:

$$x < y \Rightarrow g(x) < g(y) \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^x} < \frac{1}{a^y} \Rightarrow a^x > a^y$$

$$\Rightarrow f(x) > f(y).$$

Logo, $f(x) = a^x$; com $0 < a < 1$ é decrescente.

$\square$

GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL:

Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Como

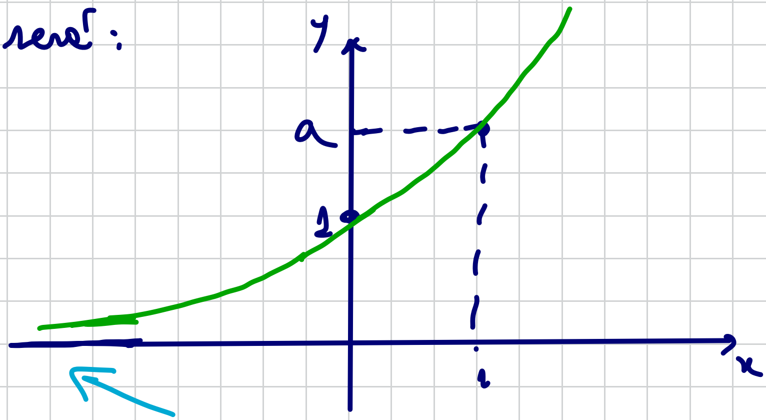
$\therefore$ $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então

a reta $y = 0$ divide o plano cartesiano numa região com gráfico e uma região sem gráfico, respectivamente, acima e abaixo do eixo horizontal.

• Se $a>1$; então temos f crescente, com assíntota horizontal $y=0$. Além disso, note que

$$f(0)=a^0=1.$$

O esboço gráfico de $y=a^x$; $a>1$ será:



x	$y=a^x$
0	1
1	$a>1$

o gráfico de $y=a^x$ vai se aproximar de $y=0$, porém nunca encosta, pois $a^x>0$, $\forall x$.

$D(f)=\mathbb{R}$; $Im(f)=(0,+\infty)$

$y=a^x>0$

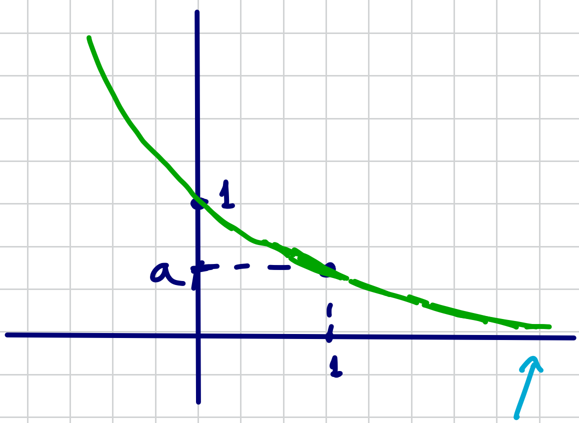
• se $0 < a < 1$, então já temos $f(x) = a^x$ decrescente. Além disso, $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donde segue que $y = 0$ é uma assíntota horizontal, e, além disso,

$$y = a^x > 0, \forall x \Rightarrow Im(f) = (0, +\infty)$$

Pontos importantes:

x	$y = a^x$
0	1
1	$a < 1$

Disso, o esboço gráfico de f será:



o gráfico de f se aproxima do eixo horizontal, sem tocar.

Vejamos alguns exemplos:

Ex: Esboce o gráfico de cada função abaixo, indicando domínio e imagem.

(a) $f(x) = 2^{x}$

(b) $f(x) = 2^{1-x}$

(c) $f(x) = 1 + 2^{x-1}$

(d) $f(x) = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{1-4x}$.

Solução:

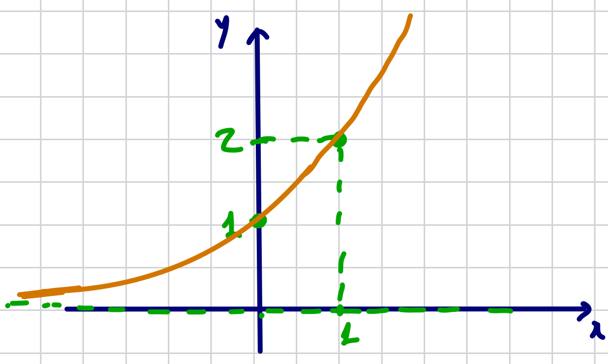
(a) $y = 2^{x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, $\mathrm{Im}(f) = (\underline{0}, +\infty)$ → $y = 0$: ASSÍNTOTA HORIZONTAL

Como não há restrição para a variável x, temos que $D(f) = \mathbb{R}$.

Esboço gráfico:

x	$y = 2^{x}$
0	1
1	2



(b) $y = 2^{1-x} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

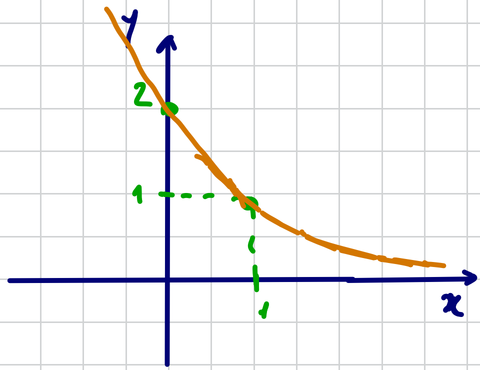
Logo, $Im(f) = (0, +\infty)$

Além disso, não há restrição para a variável x, logo, $D(f) = \mathbb{R}$.

Note que: $y = 2^{1-x} = 2^1 \cdot 2^{-x} = 2 \cdot \frac{1}{2^x} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$; ou seja, f é decrescente.

Esboço gráfico:

x	$y = 2^{1-x}$
1	$2^0 = 1$
0	$2^1 = 2$



(c) $y = 1 + 2^{x-1} \Rightarrow y - 1 = \underbrace{2^{x-1}}_{>0}$

Como não há restrição para a variável x, segue que $D(f) = \mathbb{R}$.

$y - 1 > 0 \Rightarrow y > 1$

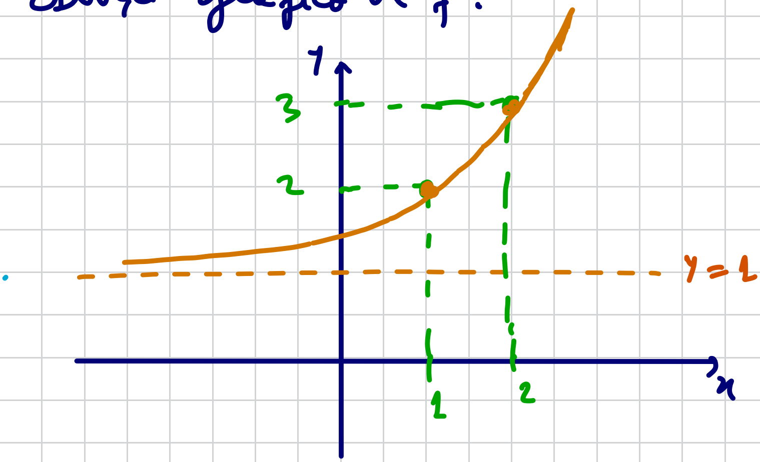
$Im(f) = (1, +\infty)$

ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $\boxed{y = 1}$.

$$y = 1 + 2^{x-1} = 1 + 2^{x} \cdot 2^{-1}$$

$$\Rightarrow y = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2^{x} \qquad (f \text{ é crescente})$$

Esboço gráfico de f:



x	$y = 1+2^{x-1}$
1	2
2	3

(d) $\quad y = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{1-4x}.$

$$\hookrightarrow \quad y - 2 = -\left(\frac{1}{3}\right)^{1-4x} \quad (x\,-1)$$

$$2 - y = \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{1-4x}}_{>0} \Rightarrow 2 - y > 0$$

$$\Rightarrow -y > -2$$

$$x(-1) \Rightarrow \underline{y < 2}$$

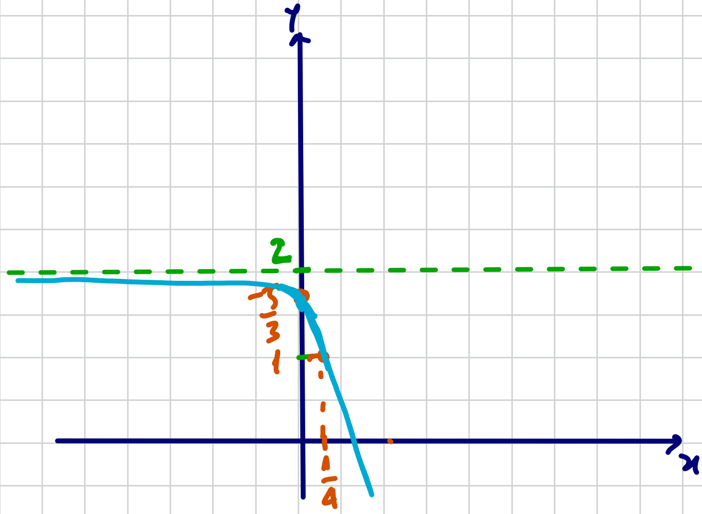
ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 2$

$$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 2)$$

$D(f) = \mathbb{R}$, pois não há restrição para a variável x.

Esboço gráfico de f:

x	$y = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{1-4x}$
0	$2 - \frac{1}{3} = \frac{6}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$
$\frac{1}{4}$	$2 - \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 2 - 1 = 1$



Um bom software é o <u>GEOGEBRA</u>.

Def.: Uma equação exponencial é uma equação na qual a variável encontra-se no expoente.

Ex.: $4^x + 4 = 5 \cdot 2^x$.

Para resolver uma eq. exponencial precisamos obter igualdade de mesma base.

Ex: $3^{2x-4} = 27$

$$3^{2x-4} = 3^3 \Leftrightarrow 2x - 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3 + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x = 7$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{7}{2}}$$

$S = \{\frac{7}{2}\}$.