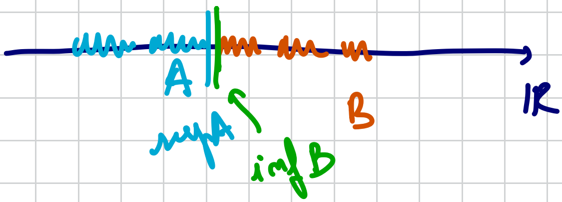
CÁLCULO II

$\boxed{\text{25/04/25 – AULA 02}}$

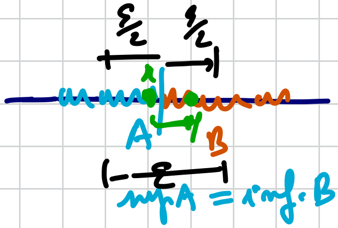
No final da aula passada vimos os conceitos de integral superior e inferior de uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada.

Vamos ser mais precisos: de um resultado de Análise, tem-se: Dados $A, B \subset \mathbb{R}$, tais que, $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$, $x \leq y$.



Então, $\sup A \leq \inf B$.

Além disso, $\sup A = \inf. B \iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in A$ e $\exists\, y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.



$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.

No nosso contexto, sendo

$$A = \{ s(f;P) : P \text{ é partição de } [a,b] \}$$

e

$$B = \{ S(f;P) : P \text{ é partição de } [a,b] \},$$

$A, B \in \mathbb{R}$ e são tais que,

$$\forall x \in A, \ \forall y \in B, \quad x \leq y, \text{ pois,}$$

por um lema, sendo P_1 e P_2 partições quaisquer de $[a,b]$:

$$s(f;P_1) \leq S(f;P_2)$$

Então;

$$\underbrace{\sup A}_{= \underline{\int_a^b} f} = \underbrace{\inf B}_{= \overline{\int_a^b} f} \iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists \ P_1, P_2$$

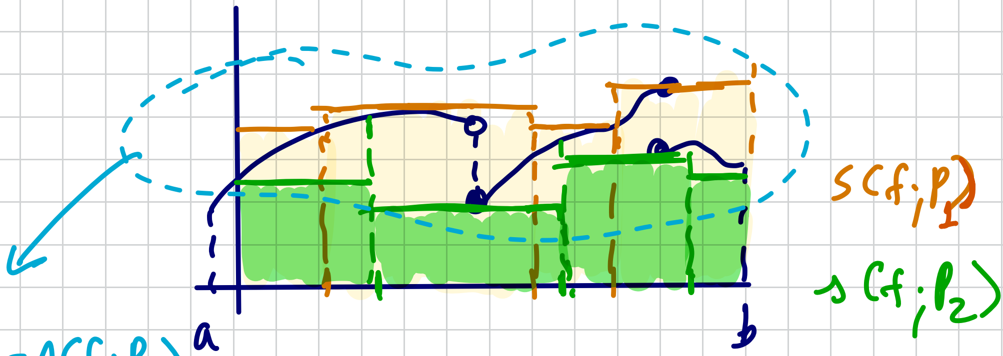
partições de $[a,b]$ tais que

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon$$

Isto inspira o seguinte conceito:

<u>Def.</u>: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, f é integrável se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \ P_1, P_2$ partições do intervalo $[a,b]$ tais que

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$



$S(f;P_1) - s(f;P_2)$

↳ f será integrável, se dado $\varepsilon > 0$ (pequeno), concluímos que esta diferença $S(f;P_1) - s(f;P_2)$ fica menor do que o erro $\varepsilon > 0$.

Este conceito ainda não é um resultado prático pois envolve duas partições quaisquer P_1 e P_2, o que pode tornar o cálculo inviável.

Felizmente, vamos melhorar este resultado como segue:

PROP.: Uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada é integrável se, e somente, $\forall \varepsilon>0$, $\exists P$ partição de $[a,b]$, tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

DEMONSTR.: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada.

($\Rightarrow$) Suponha f integrável. Então, pela def. acima segue que existem P_1 e P_2 partições de $[a,b]$ tais que

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon. \qquad (*)$$

Seja $P = P_1 \cup P_2$ um refinamento para P_1 e para P_2. Então, por um lema da aula passada [que diz que, ao refinar uma partição a soma superior não aumenta e a soma inferior não diminui], segue que:

$$S(f;P) \leq S(f;P_1),$$

e

$$s(f;P_2) \leq s(f;P)$$

Então:

$$S(f;P) \leq S(f;P_2)$$

$$+ \quad -s(f;P) \leq -s(f;P_2)$$

$$S(f;P) - s(f;P) \leq S(f;P_2) - s(f;P_2) < \varepsilon$$

por (*)

Ou seja, obtemos que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

Isso prova a necessidade.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $\exists\, P$ partição de $[a,b]$ tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

Vamos mostrar que f é integrável.

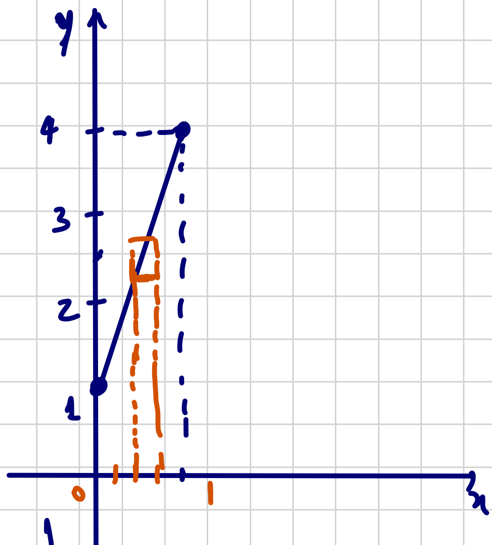
De fato, basta tomar $P_1 = P_2 = P$, e daí:

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon \quad , \text{ i.e.,}$$

f é integrável. $\square$

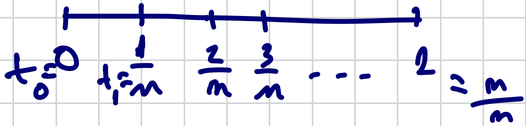
Vejamos alguns exemplos:

01) Calcule $\displaystyle\int_0^1 (3x+1)\,dx$.



Solução:

Seja P_n uma partição regular que divide $[0,1]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$



$t_0 = 0$

$t_1 = 0 + \frac{1}{n}$

$t_2 = 0 + 2\cdot\frac{1}{n} = \frac{2}{n}$

$\vdots$

$t_i = 0 + i\cdot\frac{1}{n} = \frac{i}{n}$

Ou seja, tem-se a partição

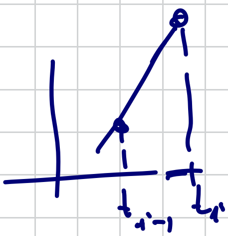
$$P_n = \left\{0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \frac{3}{n}; \dots, \frac{n}{n} = 1\right\}$$

Como $f(x) = 3x+1$ é crescente em $[0,1]$, teremos

$$M_i = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) = f(t_i) = f\left(\frac{i}{n}\right) = 3\cdot\left(\frac{i}{n}\right)+1$$

e

$$\inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) = f(t_{i-1}) = f\left(\frac{i-1}{n}\right) = 3\,\frac{(i-1)}{n}+1$$



$$\Delta t_i = \Delta x = t_i - t_{i-1} = \frac{1}{n}$$

Assim, montando $S(f;P_n)$, teremos:

$$s(f; P_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M_i}_{\substack{\sup f(x) \\ [t_{i-1}, t_i]}} \overbrace{(t_i - t_{i-1})}^{1/n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n} + 1\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n^2} + \frac{1}{n}\right) =$$

obs.: Mostremos propriedades dos somatórios:

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) := F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(n);$$

que tem as propriedades:

01) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} K = n.K$

02) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(F(i) + G(i)\big) = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$

03) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} K.F(i) = K.\sum_{i=1}^{n} F(i)$

Mostremos (02):

$$\sum_{i=1}^{n} (F(i) + G(i)) = F(1) + G(1) + F(2) + G(2) + \dots$$
$$\dots + F(n) + G(n) =$$

$$= \underbrace{F(1)+F(2)+\cdots+F(n)} + \underbrace{G(1)+G(2)+\cdots+G(n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$$

$$= S(f;P) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n^2}+\frac{1}{n}\right) \underset{\text{O2)}}{=} \sum_{i=1}^{n}\frac{3i}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}$$

$$= \frac{3}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} 1$$

Lembre que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{1+2+3+4+\cdots+n}_{\text{SOMA DE } n \text{ TERMOS DE UMA P.A. DE RAZÃO 1.; COM}} = \frac{(1+n).n}{2} \; ;$$

$a_1 = 1$; $a_n = n$

$$S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$$

e disso:

$$S(f;P_n) = \frac{3}{n^2}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{1}{n}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{1.n\,=\,n} = \frac{3}{n^{\cancel{2}}}\cdot\left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right) + \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}$$

$$\Rightarrow S(f;P_n) = \frac{3}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) + 1 = \frac{3}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+1$$

Refinamos a partição P_n fazendo o limite

$$\lim_{n\to\infty} P_n ,$$

e então vamos encontrar:

$$\overline{\int_0^1} f = \lim_{n\to\infty} S(f;P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\Big(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Big)+1$$

$$= \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$$

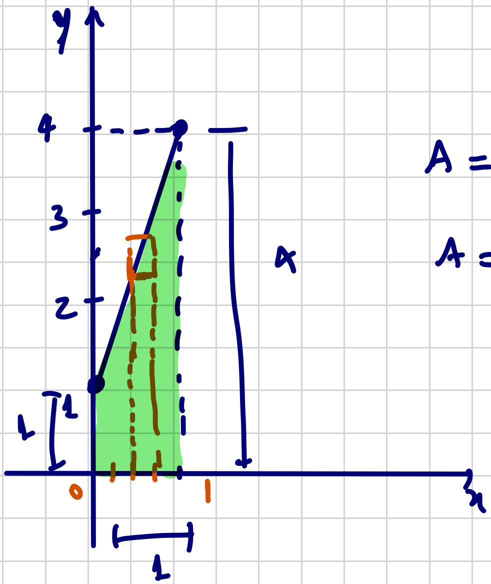
$$\Rightarrow \boxed{\overline{\int_0^1} f = \frac{5}{2}}$$

Analogamente, se mostra que $\boxed{\underline{\int_0^1} f = \frac{5}{2}}$

Logo, f é integrável, e

$$\int_0^1 f = \frac{5}{2}.$$

Obs! Como $f \geq 0$, $\int_0^1 f$ é a área abaixo do gráfico de f no intervalo $[0,1]$.



A = área de um trapézio:

$$A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(4+1).1}{2} = \frac{5}{2}$$