Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo I
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 04 de Exercícios - Cálculos de limites. Limites notáveis. Limites infinitos e no infinito.

1. Calcule cada limite abaixo, se existir:[1]

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x-7}$ (c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$ (e) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-5x+6}-x$ (f) $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

(g) $\lim_{x\to-1} \frac{2}{x+1}$ (h) $\lim_{x\to3} \frac{1}{x^2-9}$ (i) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}$

(j) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{2x}$ (k) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 7x}$ (ℓ) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2x-1)}{2-4x}$

(m) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{2x^2}$ (n) $\lim_{x\to0} \frac{x-\operatorname{sen} 2x}{x+\operatorname{sen} x}$ (o) $\lim_{x\to0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

(p) $\lim_{x\to0} \frac{\arctan 2x}{\operatorname{sen} 3x}$ (q) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x}$ (r) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos 2x}{x\tan 3x}$

(s) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} 2x-\tan 3x}{4x-\operatorname{sen} x}$ (t) $\lim_{x\to0} \frac{\tan x-\operatorname{sen} x}{x^2\operatorname{sen} 4x}$ (u) $\lim_{x\to\pi} \frac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\pi-x}$

(v) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{2x}\right)^{-2x}$ (x) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)^{6x-4}$ (y) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+4}\right)^{\frac{1-2x^2}{3x-1}}$

(w) $\lim_{x\to0} (1+2\operatorname{sen} x)^{\cot x+4}$ (z) $\lim_{x\to0} \left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ (α) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}\ln\sec x$

(β) $\lim_{x\to0} \frac{2x+\operatorname{sen} 3x}{x^3}\ln\sec x$ (γ) $\lim_{x\to\infty} x\left(\ln(5+3x+3x^2)-\ln(3x^2)\right)$

2. Usando o segundo limite notável, prove o importante limite abaixo, onde $a>0$, $a\neq1$:

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

3. Usando o exercício anterior, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to0} \frac{2^x-3^x}{\operatorname{sen} 3x}$ (b) $\lim_{x\to0} \frac{e^{mx}-1}{3^x-8^{2x}}$ (c) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{senh} x}{x}$

4. (a) Represente $x=\operatorname{arcsenh} y$ em termos de logaritmos.

(b) Com a representaçao obtida em (a), calcule o limite $\lim_{y\to0}\frac{1}{y}\operatorname{arcsenh} y$.

5. Defina $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$. Em seguida, usando essa definição, prove que

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sech} x=0.$$

(Sugestão: use o fato de que $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x>x$, e daí $e^x+e^{-x}>x$).

---

[1] Respostas

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) 2 (d) 0 (e) $-\frac{5}{2}$ (f) $\frac{1}{2}$ (g) $\nexists$ (h) $\nexists$ (i) $+\infty$ (j) $\frac{3}{2}$ (k) $\frac{5}{7}$ (ℓ) $-\frac{1}{2}$
(m) $\frac{1}{4}$ (n) $-\frac{1}{2}$ (o) $\frac{1}{4}$ (p) $\frac{2}{3}$ (q) 1 (r) $\frac{2}{3}$ (s) $-\frac{1}{3}$ (t) $\frac{1}{8}$ (u) 0 (v) e^{-3} (x) e^{12}
(y) $e^{\frac{2}{3}}$ (w) e^2 (z) e^3 (α) $\frac{1}{2}$ (β) $\frac{5}{2}$ (γ) 1

6. **(Sel. Mestr. UFRGS 2011/2)**
   (a) Seja $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Defina precisamente o significado de $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.
   (b) Prove que se $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = B$, então $\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = A + B$.

7. Defina $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$. Em seguida, prove que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty.$$

8. Prove que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e que $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

9. Prove que $\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1$

10. Prove que $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x+1}{2x+5} = \dfrac{3}{2}$.