Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo I
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 03 de Exercícios - Limites: propriedades, cálculos, limites laterais, Teorema do Sanduíche

1. Usando a definição de limite, prove que

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ (b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{3}$ (c) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0.$

2. Mostre que se $\lim\limits_{x\to 3} xf(x) = 12$, então existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ e é igual a 4.

3. Dê um exemplo em que $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))$ existe mas nem $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e nem $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existem.

4. Use a propriedade do limite de um quociente visto em aula para provar que se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existir e for diferente de zero, então

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}.$$

5. Considere a *função de Dirichlet* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ for racional} \\ 0, \text{ se } x \text{ for irracional} \end{cases}$$

   Afirmamos que $\forall a \in [0,1]$, $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Por quê?

6. Calcule cada limite a seguir, se existir[1]:

   (a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$ (b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+5x-6}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ (e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ (f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ (h) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ (i) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

   (j) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ (k) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ (ℓ) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+x-1}-1}$

   (m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-1}$ (n) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[4]{x^2-3}-\sqrt[4]{x-1}}{x^2-4}$ (o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-4x+11}{1-x-5x^2}$

   (p) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x^3-7x+2}{2x^2-14x+8}$ (q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-5x+11}{1-7x}$ (r) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^4-4x^3+2}{3-5x^3-2x^7}$

   (s) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ (t) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-5x+6}-x$ (u) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{x-2}$

---

[1] Respostas:
(a) 27 (b) -2 (c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{a-1}{3a^2}$ (f) na^{n-1} (g) $\frac{1}{4}$ (h) $-\frac{1}{56}$ (i) $\frac{1}{4}$ (j) $-\frac{1}{3}$ (k) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
(ℓ) $\frac{1}{3}$ (m) $\frac{1}{24}$ (n) $\frac{1}{4}$ (o) $-\frac{3}{5}$ (p) $-\infty$ (q) $-\infty$ (r) 0 (s) 0 (t) $-\frac{5}{2}$ (u) $+\infty$ (v) $-\infty$
(x) -1 (y) 0

(v) $\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} \dfrac{2+x}{3x-1}$ (x) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|}$ (y) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+a}-\sqrt{x}$

7. Supondo que vale a seguinte cadeia de desigualdades
$$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4},$$
prove que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.

8. Seja f uma função tal que para todo $x \neq 0$, $-x^2+3x \leq f(x) < \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

9. Suponha que para todo x, $|g(x)| \leq x^4$. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x}$.

10. Admitindo que $\cos x \leq \operatorname{sech} x \leq 2x^2+1$, para todo $x \in (-1,1)$, calcule
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sech} x - 1}{x}.$$

11. Dada a função f em cada item, faça o seu esboço gráfico e ache o limite indicado, justificando sua existência ou não.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 2 \\ 8-2x, \text{ se } x > 2. \end{cases}$ (i) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, (ii) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, (iii) $\lim_{x\to 2} f(x)$.

(b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. (i) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, (ii) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, (iii) $\lim_{x\to 0} f(x)$.

12. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq -2 \\ ax+b, \text{ se } -2 < x < 2 \\ 2x-6, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$, ache os valores de a e b tais que existam os limites $\lim_{x\to -2} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$.

13. Dados $f(x) = \begin{cases} x^2+3, \text{ se } x \leq 1 \\ x+1, \text{ se } 1 < x \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 2, \text{ se } 1 < x \end{cases}$

(a) Mostre que $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe.

(b) Mostre que $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} g(x)$ existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim_{x\to 1} g(x)$ não existe.

(c) Ache as fórmulas que definem $f(x)g(x)$.

(d) Prove que $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)$ existe, mostrando que $\lim_{x\to 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)g(x)$.

14. Com ajuda dos limites laterais e no infinito, esboçar os gráficos das seguintes funções, indicando domínio e imagem:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$ (b) $f(x) = \dfrac{3-2x}{9-x^2}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-x^2}$ (e) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{1-x^2}$ (f) $f(x) = \left|\dfrac{2x-5}{x^2-1}\right|$