Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Aritmética
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 03 de Exercícios - O conjunto dos Números Inteiros

1. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostre que

   (a) $(-1) \cdot a = -a$.
   (b) Se $a^2 = 0$, então $a = 0$.
   (c) Se $a^2 = a$, então $a = 0$ ou $a = 1$.

2. Sejam a e b inteiros tais que $a < b$. Prove que $-a > -b$.

3. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que:

   (a) Se $c > 0$ e $ac < bc$, então $a < b$.
   (b) Se $c < 0$ e $ac < bc$, então $a > b$.
   (c) Se $ab > 0$, então $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$.

4. Dado um número inteiro a, definimos o *valor absoluto* de a ou o *módulo* de a, por

   $$|a| = \max\{-a, a\}.$$

   Isto posto, prove que

   (a) $|-a| = |a|$.
   (b) $|ab| = |a| \cdot |b|$.
   (c)$-|a| \leq a \leq |a|$.
   (d) $|a + b| \leq |a| + |b|$.
   (e) $|a - b| \geq |a| - |b|$.

5. Prove que se um conjunto de números inteiros tem um elemento mínimo, então este é único.

6. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Prove por indução sobre n que

   $$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

   para todo $n \geq 1$.

7. Seja $a \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$. Prove por indução que

   (i) $(-a)^n = a^n$, para todo $n \geq 0$, par.
   (ii) $(-a)^n = -a^n$, para todo $n \geq 1$, ímpar.

8. Prove que $n^3 < n!$, $\forall n \geq 6$.

9. Mostre que $2^n < n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.

10. Mostre que $2^n < n! < n^n$, para $n \geq 4$.

11. Prove, usando indução, que a soma S_n dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada pela fórmula

    $$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ, \ \ n \geq 3.$$

12. Usando o Princípio da Indução Matemática, prove que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado pela fórmula

    $$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$