Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Aritmética
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 de Exercícios - O conjunto dos números naturais via axiomas de Peano.

1. Dados dois números naturais a e b. Dizemos que a é *menor do que* b, e escrevemos $a < b$ se, e somente se, existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $a + m = b$. Do mesmo modo, diremos que a é *menor ou igual do que* b, e escrevemos $a \leq b$, se, e somente se, ou $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $a + m = b$ ou $a = b$. Isto posto, prove as seguintes propriedades: dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se:

   (a) $a < b$ e $b < c$, então $a < c$ (propriedade transitiva)

   (b) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$, $\forall c \in \mathbb{N}$

   (c) $a < b \Rightarrow ac < bc$, $\forall c \in \mathbb{N}$

2. Dado $n \in \mathbb{N}$. Prove que não existe nenhum número natural x tal que $n < x < n + 1$.

3. Prove que $1 \cdot a = a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

4. Prove que, $\forall x \in \mathbb{N}$, tem-se que $x + x = 2x$, onde $2 = 1^+$.

5. Use a indução para provar que

   (a) $1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

   (b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

   (c) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

   (d) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (e) $2^n > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (f) $n! \leq n^n$, $\forall n \geq 1$.

6. Prove a propriedade distributiva[1] em $\mathbb{N}$: para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$(a + b)c = ac + bc$$

[1]Em aula foi provada outra, ou seja, foi mostrado que $a(b + c) = ab + ac$.