CÁLCULO I

09/12/24 – AULA 09

INDETERMINAÇÃO DO TIPO $\frac{0}{0}$.

Considere a função $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Perguntamos: $\exists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

Pelas propriedades aritméticas vistas na aula passada, poderíamos fazer

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} x^2-1}{\lim\limits_{x \to 1} x-1}.$$

Porém,

$$\lim_{x \to 1} x-1 = 1-1 = 0.$$

Mais do que isso, teríamos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(1)^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

É UM SÍMBOLO DE INDETERMINAÇÃO.

O símbolo de indeterminação indica que, quando $x \to a$, tem-se o fator $x - a$ no numerador e no denominador, o que gera o $\frac{0}{0}$.

Para remover esta indeterminação basta fatorar numerador e denominador de algum modo, de forma a aparecer o fator $x - a$ no numerador e no denominador. Estando fatorado, uma simplificação deverá remover a indeterminação.

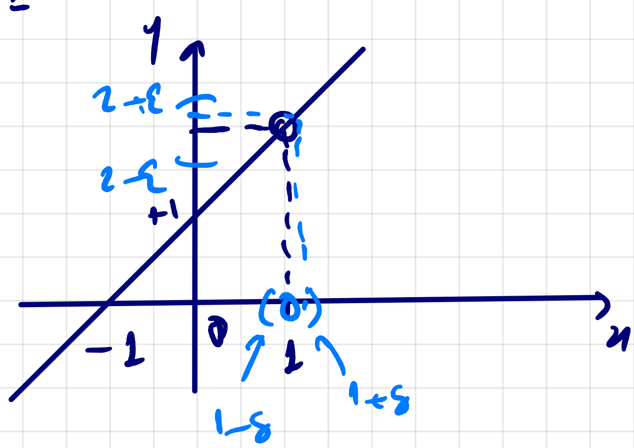
Voltando ao problema, temos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \overset{0/0\ \text{(INDET.)}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} (x+1) =$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

$\square$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, \quad x \neq 1.$$



Vejamos outros exemplos de cálculo de limites:

01) $$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 6x + 9} \overset{0/0 \text{ (INDET.)}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{x(x^2 - 9)}{(x-3)^2} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x.(x+3).\cancel{(x-3)}}{(x-3)^{\cancel{2}}} = \lim_{x \to 3} \frac{x(x+3)}{x-3} = \frac{3.(6)}{3-3}$$

$$= \frac{18}{0} = \nexists$$

02) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \overset{0/0 \text{ (INDET.)}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}.(x-1)}{(x+2)\cancel{(x-2)}} =$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2} - 3x + 2 & x - 2 \\ \hline -\cancel{x^2} + 2x & x - 1 \\ -x + \cancel{2} & \\ +x \cancel{-2} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x-2).(x-1)$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

03) $\lim_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x^3-2x^2} = \overset{0/0}{?}$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5} - 32 & x-2 \\
\hline
-\cancel{x^5} + 2x^4 & x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 \\
\hline
\cancel{2x^4} - 32 & \\
-\cancel{2x^4} + 4x^3 & \\
\hline
\cancel{4x^3} - 32 & \\
-\cancel{4x^3} + 8x^2 & \\
\hline
\cancel{8x^2} - 32 & \\
-\cancel{8x^2} + 16x & \\
\hline
\cancel{16x} - \cancel{32} & \\
-\cancel{16x} + \cancel{32} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x^5 - 32 = (x^4+2x^3+4x^2+8x+16).(x-2)}$

Assim, obtemos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x^3-2x^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)\cdot\cancel{(x-2)}}{x^2\cancel{(x-2)}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^4+2x^3+4x^2+8x+16}{x^2} =$$

$$= \frac{(2)^4 + 2.(2)^3 + 4.(2)^2 + 8.2 + 16}{2^2} = \frac{5.\cancel{16}^{\,4}}{\cancel{4}} = \underline{\underline{20}}$$

04) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x + 2}{2x + 2} = \dfrac{0}{0}$

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{x^3} + x + 2 & x + 1 \\ \hline
-\cancel{x^3} - x^2 & x^2 - x + 2 \\ \hline
-\cancel{x^2} + x + 2 & \\
+\cancel{x^2} + \cancel{x} & \\ \hline
2x + \cancel{2} & \\
-2x - 2 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

obs: dividimos por $x - (-1)$

$$x^3 + x + 2 = (x^2 - x + 2)(x + 1)$$

Assim, obtemos:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x + 2}{2x + 2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x^2 - x + 2) \cdot \cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x + 2}{2} = \frac{(-1)^2 - (-1) + 2}{2}$$

$$= \frac{1 + 1 + 2}{2} = 2$$

Sempre que resultar o símbolo de indeterminação $\frac{0}{0}$ precisaremos efetuar alguma manipulação algébrica na expressão que define f de modo a aparecer o fator $x-a$ no numerador e no denominador de modo a simplificá-lo. Isso remove a indeterminação. Nos exemplos acima contemplamos como resolver para funções racionais. (quociente de polinômios).

No que segue apresentamos como lidar com funções irracionais, que consistirá em efetuar racionalizações. Vejamos:

(a) $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} ?$$

Neste caso, o numerador $\sqrt{x}-1$, com radical, é tal que, se o multiplicarmos pelo seu fator racionalizante, que é $\sqrt{x}+1$, obtemos

$$(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x})^2-(1)^2 = x-1,$$

logo, quando $x \to 1$, a indeterminação não envolve mais radical, o que facilita uma simplificação, i.e. a retirada da indeterminação. Vejamos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}}_{1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\cancel{\sqrt{x}})^{\cancel{2}} - (1)^2}{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(x+1)\cancel{(x-1)}.(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1).(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{(1+1).(\sqrt{1}+1)} = \frac{1}{4}$$

(b) $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{x^2-5x+6} \quad \frac{0}{0} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{x^2-5x+6} \times \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(\cancel{\sqrt{x+2}})^{\cancel{2}} - (\cancel{\sqrt{3x-2}})^{\cancel{2}}}{(x^2-5x+6)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+2-(3x-2)}{(x^2-5x+6)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-2x + 4}{(x^2 - 5x + 6)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})} =$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^2} - 5x + 6 & x - 2 \\ \hline -\cancel{x^2} + 2x & x - 3 \\ \hline -3x + \cancel{6} & \\ +3x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-2)\cdot(x-3)$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)\cdot(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})} =$$

$$= \frac{-2}{(+2-3)(\sqrt{2+2} + \sqrt{3\cdot 2 - 2})} = \frac{-2}{-1(2+2)} =$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

EXERCÍCIOS PARA ENTREGAR NA QUARTA, DIA 11/12/24:

Considere o último dígito de seu número de matrícula. Fazer a questão 15; se o último dígito for:

0 → fazer item (a)

1 ou 6 → fazer item (b)

2 ou 7 → fazer item (c)

3 ou 8 → fazer item (d)

4 ou 9 → fazer item (e)

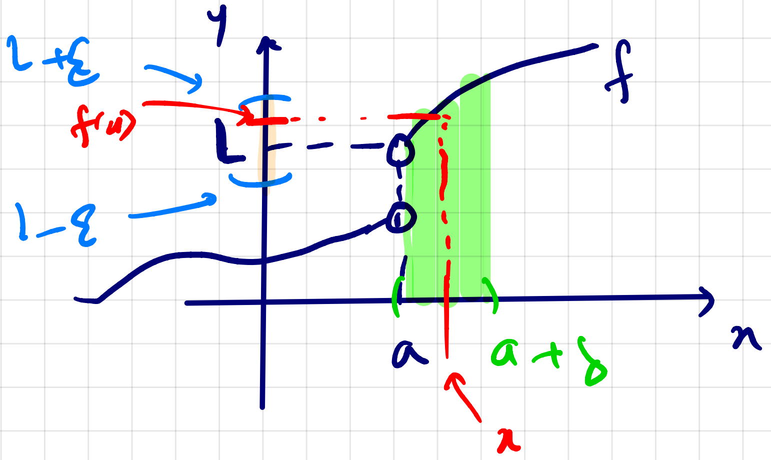
5 → fazer item (f)

LIMITES LATERAIS:

Def.: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'_+$, ou seja, $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita do conj. X. Definimos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in X: a < x < a + \delta$$
$$\implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

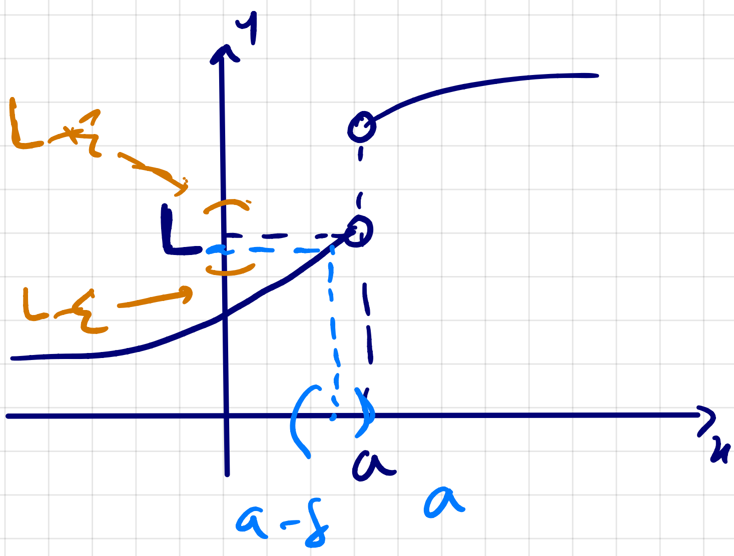


Def.: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'_-$, ou seja, $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à esquerda do conj. X. Definimos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tal que}, \ \forall x \in X: \ a - \delta < x < a \implies$$

$$\implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Note que de acordo com a def. de limite, temos que

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

<u>Ex.:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Perguntamos: $\exists \lim_{x\to 1} f(x)$?

<u>Solução:</u> Como exatamente em $x=1$ a função muda de sentença, precisamos examinar os limites laterais:

- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x-1 = 1-1 = 0$ //

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$

$$= \lim_{x\to 1^-} x+1 = 1+1 = 2 \; //$$

Disso, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \neq 0 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$.

Conclusão: $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$.

02) Verifique se existe o limite $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$,

onde $f: [0,1) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \dfrac{x}{x-1}, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Solução: Pelos limites laterais:

- $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1.$

- $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} 1 = 1.$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x).$$

Logo, $\nexists \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$.