CÁLCULO I

06/12/24 - AULA 08

PROPRIEDADES DOS LIMITES:

PROPOSIÇÃO: (UNICIDADE DO LIMITE) O limite de uma função se existir, é único. Ou seja, dado $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de um conj. X, $f: X \to \mathbb{R}$ uma função. Então, se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} f(x) = M,$$

então $L = M$.

DEMONSTR.: Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e que $\lim_{x \to a} f(x) = M$. Por absurdo, suponha que $L \neq M$.

Tome $\varepsilon = |L - M| > 0$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, segue que $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que, $\forall x \in D(f)$ tal que

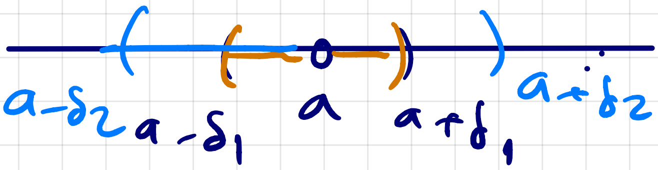
$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Do mesmo modo, como $\lim_{x \to a} f(x) = M$,

segue que $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_2 \implies |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (**)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.



Assim, $\forall\, x \in D(f)$: $0 < |x-a| < \delta$, valem $(*)$ e $(**)$. Disso:

$$\varepsilon = |L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| =$$

$$= |(L - f(x)) + (f(x) - M)| \leq \underbrace{|L - f(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x) - M|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\implies \varepsilon < \varepsilon. \quad \text{Absurdo!}$$

Portanto, $L = M$, provando a unicidade. $\square$

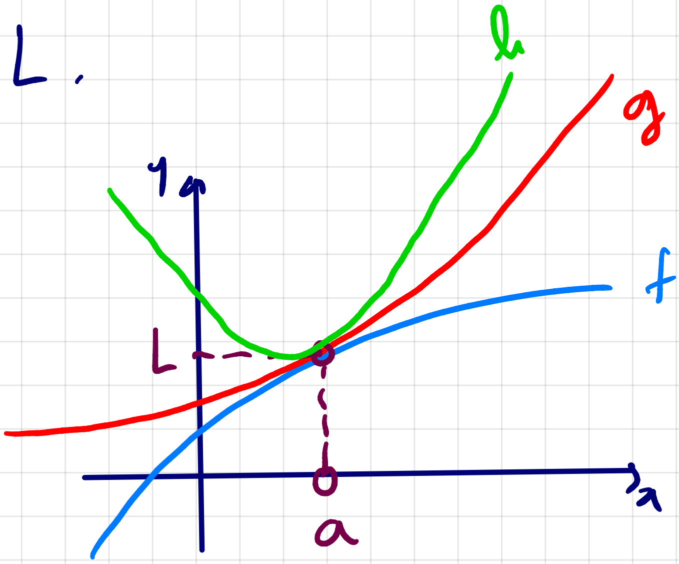
TEOREMA DO SANDUÍCHE: Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ funções, $a \in X'$ (i.e.; $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conj. X), tais que, $\forall x \in X$,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$, então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA:



DEMONSTRAÇÃO: Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, segue que $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que, $\forall x \in X$:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (*)$$

Do mesmo modo, como $\lim_{x \to a} h(x) = L$, segue que $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que, $\forall x \in X$:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |h(x) - L| < \varepsilon \quad (**)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, $\forall x \in X$; tal que $0 < |x-a| < \delta$, valem $(*)$ e $(**)$, ou seja, valem

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |h(x) - L| < \varepsilon,$$

donde segue que[(*)]

$$\underbrace{-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon}_{(II)} \quad \text{e} \quad -\varepsilon < \underbrace{h(x) - L < \varepsilon}_{(I)}$$

Como, por hipótese,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in X,$$

subtraindo L em toda a cadeia de desigualdades, vem:

$$-\varepsilon \underset{\text{por (II)}}{<} f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L \underset{\text{por (I)}}{<} \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon, \quad \forall x : 0 < |x-a| < \delta$$

Ou seja,

$$|g(x) - L| < \varepsilon, \text{ sempre que } 0 < |x-a| < \delta,$$

i.e., mostramos que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. $\square$

(*) Lembre-se das funções elementares, o estudo de módulos:

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$$

EXEMPLO: Seja $f(x) = (x-1)^2 \cdot \cos \dfrac{1}{x-1}$.

Prove que $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$.

SOLUÇÃO: Note que, $\forall \alpha$; $|\cos \alpha| \leq 1$, i.e.,

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Assim, $\forall x \neq 1$, temos que

$$-1 \leq \cos \frac{1}{x-1} \leq 1.$$

Multiplicando por $(x-1)^2 \geq 0$, obtemos

$$-(x-1)^2 \leq (x-1)^2 \cdot \cos \frac{1}{x-1} \leq (x-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad -(x-1)^2 \leq f(x) \leq (x-1)^2$$

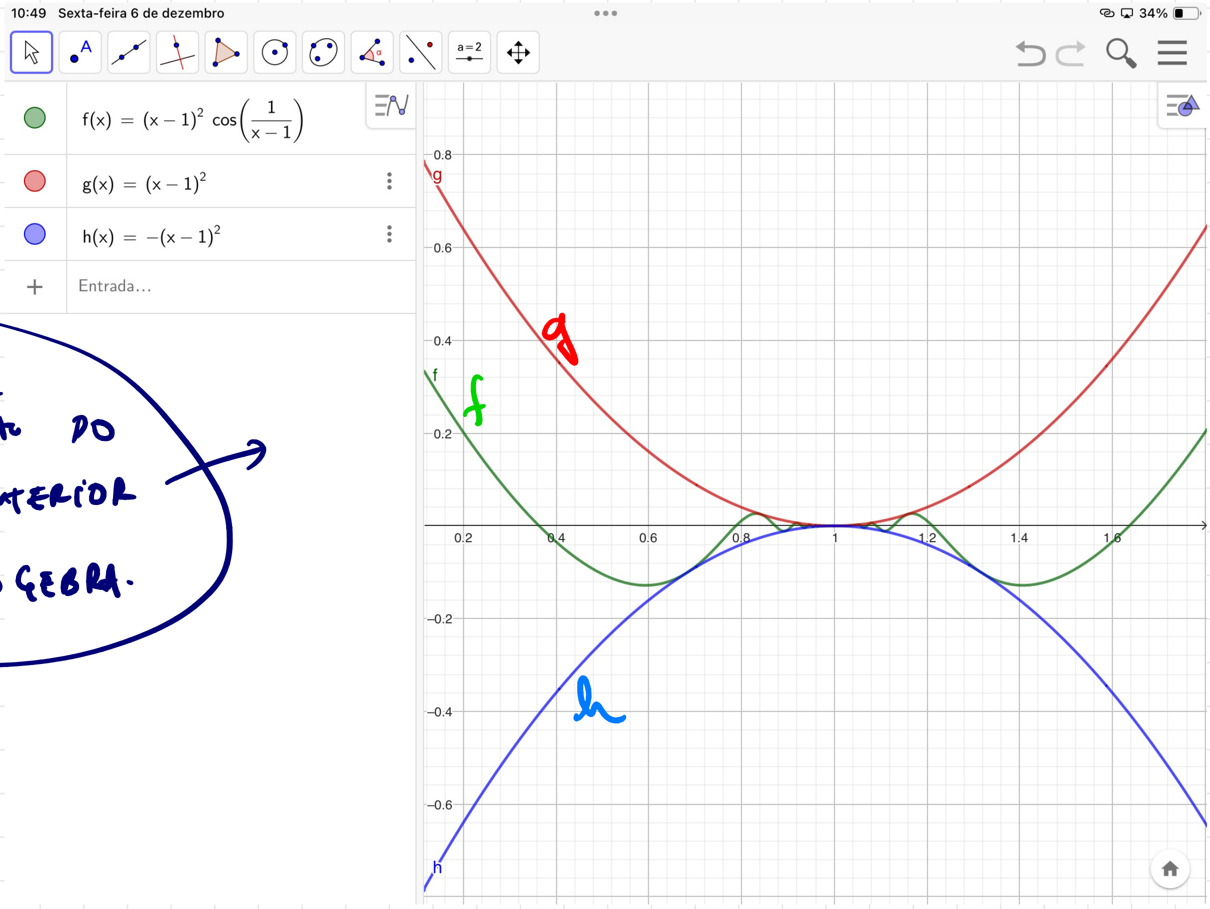
Como $\lim_{x \to 1} -(x-1)^2 = -(1-1)^2 = 0$, e

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 = (1-1)^2 = 0,$$

pelo T. do Sanduíche segue que $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$.

$\square$

Uma ilustração do problema anterior pelo GeoGebra.



Proposição (Propriedades aritméticas dos limites)

Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M, \text{ então:}$$

(i) $$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = L+M = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

(ii) $$\lim_{x\to a} (f(x)-g(x)) = L-M = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x).$$

(iii) $$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = L\cdot M = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

(iv) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$,

desde que $M \neq 0$.

(v) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = L^{M}$

(vi) $\lim_{x \to a} \ln f(x) = \ln\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$,

desde que $\ln f(x) > 0$.

<u>DEMONSTR.</u>: Provaremos apenas (i).

(i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$.

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, segue que $\exists\, \delta_1 > 0$,

tal que, $\forall x \in X$:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = M$, segue que $\exists\, \delta_2 > 0$, tal que, $\forall x \in X$:

$$0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (**)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Então, $\forall x \in X$: $0 < |x-a| < \delta$, valem (*) e (**).

Assim:

$$|f(x)+g(x) - (L+M)| = |(f(x)-L) + (g(x)-M)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x)-L|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x)-M|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

desigualdade triangular

$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Ou seja, mostramos que, $\forall \varepsilon > 0$ dado, $\exists \delta > 0$ tal que,

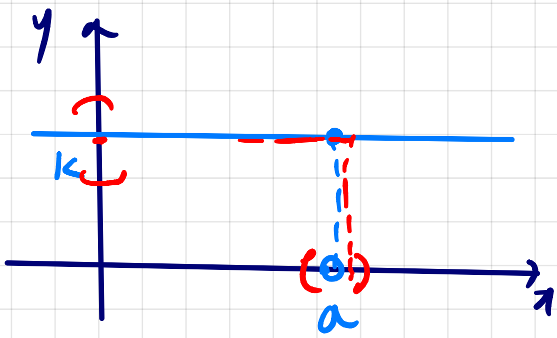
$$|f(x)+g(x) - (L+M)| < \varepsilon,$$

sempre que $0 < |x-a| < \delta$; ou seja, mostramos que $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = L + M.$

$\square$

PROPOSIÇÃO: O limite de uma constante é a própria constante. Ou seja, se $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = K$, $\forall x \in X$, então, dado $a \in X'$,

$$\lim_{x \to a} K = K.$$



DEMONSTR.: Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in X$:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - K| < \varepsilon.$$

Note que, qualquer $\delta > 0$ serve, pois

$$|f(x) - K| = |K - K| = 0 < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0,$$

então, podemos tomar $\delta = \varepsilon$.

$\square$

EX.: $\lim_{x \to 1} 3 = 3.$

PROPOSIÇÃO: $\lim_{x \to a} x = a.$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in X$: $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Avaliando $|f(x)-a|$, temos:

$$|f(x) - a| = |x-a| < \delta := \varepsilon.$$

Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$. $\square$

EX.: $\lim_{x \to 5} x = 5.$; $\lim_{x \to -3} x = -3.$

PROPOSIÇÃO: $\lim_{x \to a} x^n = a^n.$

DEMONSTR.: Sendo $f(x) = x$; $g(x) = n$, então

$$\lim_{x \to a} x^n = \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^{\lim_{x \to a} g(x)} =$$

$$= \Big(\underbrace{\lim_{x \to a} x}_{= a \text{ (PROP. anterior)}}\Big)^{\overbrace{\lim_{x \to a} n}^{= n \text{ (LIMITE DA CONST.)}}} = a^n. \quad \square$$

PROP.: Se $p(x) = a_0 + a_1 . x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$,

então, $\lim_{x \to b} p(x) = p(b)$.

DEMONSTR.: De fato, basta usar os resultados anteriores:

limite da soma

$$\lim_{x \to b} p(x) = \lim_{x \to b} \left(a_0 + a_1 . x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \right) =$$

$$= \lim_{x \to b} a_0 + \lim_{x \to b} a_1 . x + \lim_{x \to b} a_2 . x^2 + \dots + \lim_{x \to b} a_n . x^n$$

limite do produto

$$= \underbrace{\lim_{x \to b} a_0}_{} + \underbrace{\lim_{x \to b} a_1}_{} . \overbrace{\lim_{x \to b} x}^{=b} + \underbrace{\lim_{x \to b} a_2}_{} . \overbrace{\lim_{x \to b} x^2}^{b^2} + \dots$$

limite de const.

$$\dots + \underbrace{\lim_{x \to b} a_n}_{} . \overbrace{\lim_{x \to b} x^n}^{b^n} =$$

$$= a_0 + a_1 . b + a_2 . b^2 + \dots + a_n . b^n = p(b)$$

$\square$

Ex.: $\lim_{x \to 1} x^3 - 2x^2 + 3 = (1)^3 - 2.(1)^2 + 3 =$

$$= 1 - 2 + 3 = 2$$