Cálculo I

04/12/24 – AULA 07

Na aula passada iniciamos o estudo de limites.
Recordando:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0, \text{ tal que}, \forall x \in D(f):$$

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$

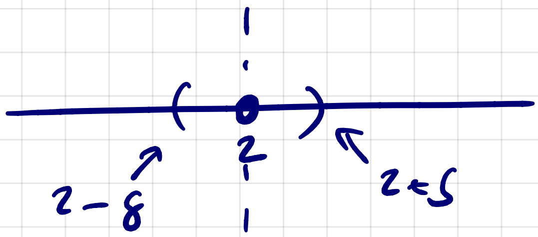
$a \in X'$
(a é ponto de acumulação de X)

Seguiremos com exemplos na aula de hoje.

02) Prove que(*) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

Solução: Dado $\varepsilon>0$, precisamos encontrar $\delta>0$, tal que, $\forall x \in D(f)$ tal que $0<|x-2|<\delta$, implique em $|f(x)-4|<\varepsilon$.

Note que devemos ter $x\neq 2$ (para evitar divisão por zero)



(*) Note que um cálculo direto falha, a priori, pois teríamos $\frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$, que é um símbolo de indeterminação.

Analisando $|f(x)-4|$, temos:

$$|f(x)-4| = \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| = \left|\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} - 4\right| =$$

$$= |x+2-4| = \underbrace{|x-2|}_{<\delta} < \delta := \varepsilon$$

Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$.

Isto prova que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. $\square$

---

03) Prove que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$, $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

<u>solução</u>: Dado $\varepsilon>0$, precisamos achar $\delta>0$ tal que,

$\forall x \in D(f)$: $0<|x-3|<\delta \implies |f(x)-9| < \varepsilon$.

Analisando $|f(x)-9|$, temos:

$$|f(x)-9| = |x^2-9| = |(x+3)\cdot(x-3)| = |x+3|\cdot \overbrace{|x-3|}^{<\delta} < |x+3|\cdot\delta$$

Note que:

$$|x+3| = |(x-3)+6| \leq \underbrace{|x-3|}_{<\delta} + |6| < \delta + 6$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

Então, vamos obter a seguinte estimativa:

$$|f(x)-9| < \underbrace{|x+3|}_{< \delta+6}\cdot\delta < (\delta+6)\cdot\delta = \delta^2+6\delta := \varepsilon .$$

Então, escrevendo $\delta^2+6\delta=\varepsilon$, basta isolar o δ.

Para isolar o δ precisamos completar um quadrado perfeito:

$$\delta^2+6\delta = \varepsilon$$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$\delta^2+2\cdot3\delta+3^2$

$$\boxed{\delta^2+2\cdot3\delta+9}-9 = \varepsilon$$

$$(\delta+3)^2-9=\varepsilon$$

$$(\delta+3)^2=\varepsilon+9$$

$$\delta+3=\sqrt{\varepsilon+9}$$

$$\Rightarrow \delta=\sqrt{\varepsilon+9}-3>0$$

Ou seja, para $\varepsilon>0$ dado, existe $\delta>0$ $(\delta=\sqrt{\varepsilon+9}-3)$, e é tal que $|f(x)-9|<\varepsilon$, sempre que $0<|x-3|<\delta$.

Isto é, mostramos que $\lim_{x\to3} x^2=9$. □

Ilustração: tomando $\varepsilon=0{,}1>0$, então teremos

$$\delta=\sqrt{0{,}1+9}-3 \cong 0{,}016>0.$$

Disso, $\forall x$ tal que $0<|x-3|<0{,}016$, é garantido que $|f(x)-9|<0{,}1=\varepsilon$.

Ex: $x=2{,}991$ é tal que:

$$0<|2{,}991-3|=0{,}009<0{,}016=\delta,$$

e daí temos

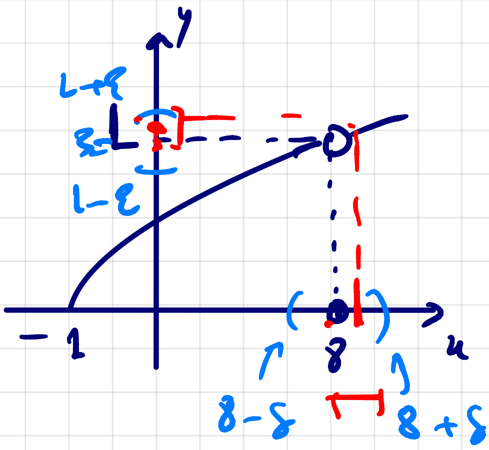
$$|f(x)-9| = |(2{,}991)^2 - 9| \cong 0{,}053 < 0{,}1 = \varepsilon .$$

04) Prove que $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt{x+1} = 3$. $(x \neq 8)$

Solução: Dado $\varepsilon>0$, precisamos achar $\delta>0$ tal que, $\forall x \in D(f)$, tal que

$0<|x-8|<\delta$, implique em

$|f(x)-3|<\varepsilon$.



Analisando a distância $|f(x)-3|$, temos:

$$|f(x)-3| = |\sqrt{x+1}-3| = \left|\frac{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)}{\sqrt{x+1}+3}\right| =$$

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$

$$= \left|\frac{(\cancel{\sqrt{x+1}})^{\cancel{2}}-9}{\sqrt{x+1}+3}\right| = \left|\frac{x+1-9}{\sqrt{x+1}+3}\right| =$$

$$\frac{\overbrace{|x-8|}^{<\delta}}{|\sqrt{x+1}+3|} < \frac{\delta}{|\sqrt{x+1}+3|}$$

Note que como o δ deve depender apenas do $\varepsilon>0$, o x que aparece no denominador deve desaparecer por alguma estimativa.

Como a expressão com o x está no denominador, ela deverá ser substituída por algo que independa de x e que seja maior do que ela, pois estando no denominador, tomando os inversos, ficará estimado por menor do que. (<).

Assim:

$$|\sqrt{x+1}+3| \geq \underbrace{\sqrt{x+1}}_{>0} + 3 > 3 \Rightarrow \frac{1}{|\sqrt{x+1}+3|} < \frac{1}{3}$$

Logo, obtemos a estimativa:

$$|f(x)-3| < \frac{\delta}{\underbrace{|\sqrt{x+1}+3|}_{<\frac{1}{3}}} < \frac{1}{3}\cdot\delta := \varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = 3.\varepsilon}$$

Isto prova que $\lim_{x \to 8} f(x) = 3$.

05) Prove que $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$.

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que,

$\forall x \in D(f)$: $0 < |x - \frac{\pi}{2}| < \delta$, implique em $|f(x) - 1| < \varepsilon$

Avaliando a distância $|f(x) - 1|$, teremos:

$$|f(x) - 1| = |\operatorname{sen} x - 1| = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2}|.$$

Vamos usar a seguinte fórmula da prostaférese:

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Obs.:
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$
$$- \quad \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}\underbrace{(\alpha+\beta)}_{p} - \operatorname{sen}\underbrace{(\alpha-\beta)}_{q} = 2 \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

Então
$$+\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \end{cases}$$
$$2\alpha = p + q \Rightarrow \alpha = \frac{p+q}{2}$$

$$\begin{cases} \beta = p - \alpha \\ \beta = p - \dfrac{p+q}{2} \\ \beta = \dfrac{2p - p - q}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{p-q}{2}$$

Logo: $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

Assim:

$$|f(x)-1| = \left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right| =$$

$$= \left| 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right| =$$

$$= 2 \cdot \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right| \cdot \underbrace{\left|\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right|}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq 2 \cdot \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right| \leq \cancel{2} \cdot \left|\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cancel{2}}\right| = \left|x-\frac{\pi}{2}\right| < \delta := \varepsilon.$$

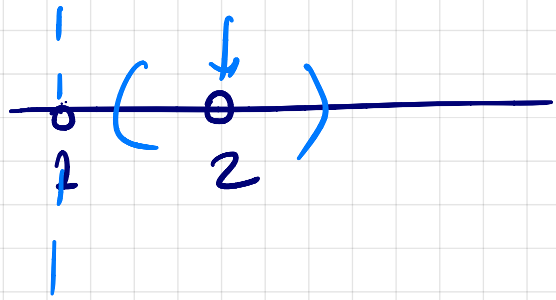
$\forall \alpha, \ |\operatorname{sen} \alpha| \leq |\alpha|$

Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$.

$\square$

06) Prove que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2}{x-1} = 2$.

Solução:



Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ (e tal δ deve ser tal que $0 < \delta < 1$),

POIS $\delta \geq 1$ VAI ABRANGER NO INTERVALO CENTRADO EM 2, EXCETO O PONTO 2, O PONTO 1, QUE NÃO ESTÁ NO DOMÍNIO DE f.

tal que, $\forall x \in D(f)$, tal que $0 < |x-2| < \delta < 1$, implique em $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

Analisando $|f(x) - 2|$, temos:

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{2}{x-1} - 2 \right| = \left| \frac{2 - 2.(x-1)}{x-1} \right| =$$

$$= \left| \frac{2 - 2x + 2}{x-1} \right| = \left| \frac{4 - 2x}{x-1} \right| = \left| \frac{-2.(x-2)}{x-1} \right| =$$

$$= \frac{2.\overbrace{|x-2|}^{<\delta}}{|x-1|} < \frac{2.\delta}{|x-1|} \qquad (*)$$

Note que:

$$|x-1| = |-1-(x-2)| \geq |-1| - |x-2| > 1-\delta > 0$$

$$|a-b| \geq |a| - |b|$$

$|x-2| < \delta$

$-|x-2| > -\delta$

$$\Rightarrow \quad |x-1| > 1-\delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x-1|} < \frac{1}{1-\delta}$$

Assim, $(*)$ fica:

$$|f(x)-2| < \frac{2\delta}{|x-1|} < \frac{2\delta}{1-\delta} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad 2\delta = \varepsilon(1-\delta)$$

$$2\delta = \varepsilon - \varepsilon\delta$$

$$2\delta + \varepsilon . \delta = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta(2+\varepsilon) = \varepsilon \quad \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$$

$\square$