CÁLCULO I

20/12/24 – AULA 13

Na aula passada estudamos o segundo limite notável:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Vejamos mais um exemplo de uso:

Ex.: Calcule $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x-2x^2}{2-2x-2x^2}\right)^{\frac{x+x^3}{x^2-1}}$.

SOLUÇÃO: Note que

• BASE: $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x-2x^2}{2-2x-2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-2\cancel{x^2}}{-2\cancel{x^2}} = 1$. $\Big\}\ 1^{-\infty}$

• EXPOENTE: $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

Então obtemos $1^{-\infty}$ que indica o uso do segundo limite notável. Assim:

$$(1+\text{exp.})^{\frac{1}{\text{exp.}}} \longrightarrow e$$

navicável $\to\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2x^2}{2-2x-2x^2}\right)^{\frac{x+x^3}{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\underbrace{\frac{x-2x^2}{2-2x-2x^2}-1}_{\text{expressão}}\right)^{\frac{x+x^3}{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x-\cancel{2x^2}-2+2x+\cancel{2x^2}}{2-2x-2x^2}\right)^{\frac{x+x^3}{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3x-2}{2-2x-2x^2}\right)^{\frac{x+x^3}{x^2-1}} =$$

$$= \Bigg[\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3x-2}{2-2x-2x^2}\right)^{\frac{2-2x-2x^2}{3x-2}}}_{\to e}\Bigg]^{\frac{3x-2}{2-2x-2x^2}\cdot\frac{x+x^3}{x^2-1}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{3\cancel{x^4}}{-2\cancel{x^4}}} = e^{\lim_{x\to-\infty}-\frac{3}{2}} = e^{-3/2}$$

O restante da aula será devotado a resolução de exercícios das listas.

EXERCÍCIOS DA LISTA 03:

2. Mostre que se $\lim_{x\to 3} xf(x) = 12$, então existe $\lim_{x\to 3} f(x)$ e é igual a 4.

SOLUÇÃO: De fato,

$$\lim_{x\to 3} x.f(x) = 12$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 3} x}_{=3} \cdot \lim_{x\to 3} f(x) = 12$$

$$\Rightarrow 3.\lim_{x\to 3} f(x) = 12 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 3} f(x) = 4}$$

4. Use a propriedade do limite de um quociente visto em aula para provar que se $\lim_{x \to a} f(x)$ existir e for diferente de zero, então

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} f(x)}.$$

Solução:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \to a} 1}{\lim_{x \to a} f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} f(x)}$$

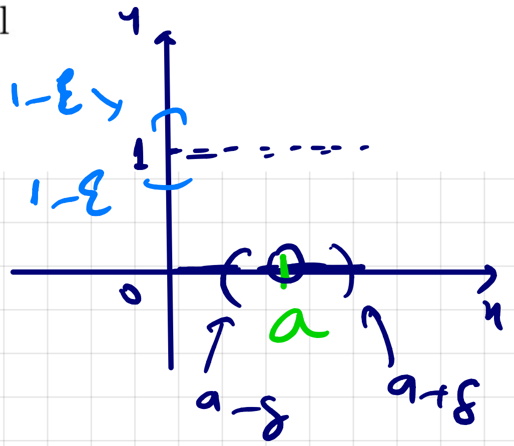
$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim_{x \to a} u(x)}{\lim_{x \to a} v(x)}.$$

$\square$

5. Considere a *função de Dirichlet* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ for racional} \\ 0, \text{ se } x \text{ for irracional} \end{cases}$$

Afirmamos que $\forall a \in [0,1]$, $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$. Por quê?



Dado $a \in \mathbb{R}$.

Suponha que $L = 1$.

Tome $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Então, $\forall \delta > 0$ tomado,

o intervalo $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ possui sempre números racionais e irracionais.

(aliás, isso é o que chamamos de DENSIDADE: o conj. $\mathbb{Q}$ dos racionais é DENSO em $\mathbb{R}$ e o conj. $\mathbb{I}$ dos irracionais também é denso)

Assim, vai existir $x_0 \in \mathbb{I}$ em $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ e será tal que $f(x_0) = 0 \notin (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

Portanto, 1 não é limite da f quando $x \to a$.

Do mesmo modo, se pensarmos que $0 = L$, existirão números $q \in \mathbb{Q}$ em $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, $\forall \delta > 0$, e daí $f(q) = 1 \notin (0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$.

Portanto, $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$, $\forall a \in [0,1]$.

6. Calcule cada limite a seguir, se existir[1]:

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$

(b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-4x+1}{x^2+5x-6}$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

(e) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

(f) $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$

(g) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

(h) $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

(i) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

(j) $\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

(k) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

(ℓ) $\lim_{x\to -2} \frac{1-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+x-1}-1}$

(m) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-1}$

(n) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{x^2-3}-\sqrt[4]{x-1}}{x^2-4}$

(o) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-4x+11}{1-x-5x^2}$

(p) $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^3-7x+2}{2x^2-14x+8}$

(q) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-5x+11}{1-7x}$

(r) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4-4x^3+2}{3-5x^3-2x^7}$

(s) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

(t) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-5x+6}-x$

(u) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2}$

(d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2+x-2)\cdot\cancel{(x-1)}}{(x^3+x^2+x-3)\cdot\cancel{(x-1)}}$ $=$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3} - 3x + 2 & x - 1 \\ \hline
-\cancel{x^3} + x^2 & x^2 + x - 2 \\
\cancel{x^2} - 3x + 2 & \\
-\cancel{x^2} + x & \\
-2x \cancel{+2} & \\
+2x - 2 & \\
0 &
\end{array}
$$

$\Downarrow$

$$\boxed{x^3 - 3x + 2 = (x^2 + x - 2)\cdot(x-1)}$$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^4} - 4x + 3 & x - 1 \\ \hline
-\cancel{x^4} + x^3 & x^3 + x^2 + x - 3 \\
\cancel{x^3} - 4x + 3 & \\
-\cancel{x^3} + x^2 & \\
\cancel{x^2} - 4x + 3 & \\
-\cancel{x^2} + x & \\
-3x \cancel{+3} & \\
+3x - 3 & \\
0 &
\end{array}
$$

$\Downarrow$

$$\boxed{x^4 - 4x + 3 = (x^3 + x^2 + x - 3)\cdot(x-1)}$$

$=$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\cancel{x-1})(x+2)}{(x^2+2x+3)(\cancel{x-1})} = \dfrac{1+2}{1+2+3} = \dfrac{1}{2}$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^2} + x - 2 & x - 1 \\ \hline
-\cancel{x^2} + x & x + 2 \\
2x \cancel{-2} & \\
-2x + 2 & \\
0 &
\end{array}
$$

$\Downarrow$

$$\boxed{x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)}$$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3} + x^2 + x - 3 & x - 1 \\ \hline
-\cancel{x^3} + x^2 & x^2 + 2x + 3 \\
2\cancel{x^2} + x - 3 & \\
-2\cancel{x^2} + 2x & \\
3x \cancel{-3} & \\
-3x + 3 & \\
0 &
\end{array}
$$

$$\boxed{x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2+2x+3)}$$

(i) $$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{2x+1})^2-(3)^2}{(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{2})^2} \times \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2x+1-9}{x-2-2} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{2\cancel{(x-4)}(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\cancel{(x-4)}\cdot(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \frac{2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{\sqrt{9}+3} = \frac{2\cdot \cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

---

m) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-1} \overset{0/0}{=}$$

Aqui, precisamos, para eliminar radicais da parte com indeterminação, usar o seguinte resultado:

$$a^n - b^n = (a-b).(a^{n-1} + a^{n-2}\cdot b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

Ex.: $a^2-b^2 = (a-b).(a+b)$

$a^3-b^3 = (a-b).(a^2+ab+b^2)$

$$a^4-b^4 = (a-b).(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

$\vdots$

No nosso caso, temos: $a = \sqrt[3]{x+7}$

$b = 2$

Temos: $a-b = \sqrt[3]{x+7} - 2$

Então, resta o fator a^2+ab+b^2 para termos

$$a^3-b^3 = (a-b).(a^2+ab+b^2).$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-1} =$$

$$= a^3 - b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x+7}-2)}{(x^2-1)} \frac{((\sqrt[3]{x+7})^2+\sqrt[3]{x+7}.2+(2)^2)}{((\sqrt[3]{x+7})^2+\sqrt[3]{x+7}.2+(2)^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x+7})^3-(2)^3}{(x+1)(x-1)((\sqrt[3]{x+7})^2+\sqrt[3]{x+7}.2+(2)^2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+7-8}{(x+1)(x-1).((\sqrt[3]{x+7})^2+\sqrt[3]{x+7}.2+(2)^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(x+1)\cancel{(x-1)}.(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4)}$$

$$= \frac{1}{(1+1).\left(\sqrt[3]{8^2} + 2.\sqrt[3]{8} + 4\right)} =$$

$$= \frac{1}{2.\left(\sqrt[3]{(2^3)^2} + 2.\sqrt[3]{2^3} + 4\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\left(\sqrt[3]{\cancel{2^3}.\cancel{2^3}} + 2.2 + 4\right)} = \frac{1}{2.12} = \frac{1}{24}$$

(n) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^4 - 4x^3 + 2}{3 - 5x^3 - 2x^7} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3\cancel{x^4}}{-2x^{\cancel{7}\,3}} =$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{3}{2x^3} = -\frac{3}{2.(-\infty)^3} = -\frac{3}{-\infty} = 0$$

(t) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 6} - x = \quad \boxed{\sqrt{\infty - \infty}} - \infty$ INDET.

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x\right) \times \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^{\cancel{2}} - x^2}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}-5x+6-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-5x+6}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-5x+6}+x}{x}}$$

$x>0$

(pois $x\to+\infty$)

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5+\frac{6}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5+\overbrace{\frac{6}{x}}^{\to 0}}{\sqrt{1-\underbrace{\frac{5}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{6}{x^2}}_{\to 0}}+1}$$

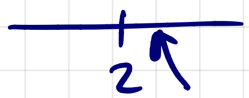
$$= \frac{-5+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = -\frac{5}{2}$$

---

u) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2}$

Dado $\delta>0$, escreva $x = 2+\delta$

Assim $x\to 2^+ \iff \delta\to 0^+$



Disso, teremos:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{2+\delta}{\cancel{2}+\delta-\cancel{2}} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{2+\delta}{\delta}$$

$$= \frac{2+0^+}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

7. Supondo que vale a seguinte cadeia de desigualdades

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}, \qquad (*)$$

prove que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$

Solução: Subtraindo 1 em (*), vamos obter:

$$-\frac{x^2}{2} \leq \cos x - 1 \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}. \qquad (I)$$

Tome $x \neq 0$. Se dividirmos (I) por $x > 0$, obtemos:

$$\underbrace{-\frac{x}{2}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0} \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq \underbrace{-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{x}{2} = 0 = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4}$,

pelo T. do Sanduíche segue que

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0} \qquad (II)$$

Agora, dividindo (I) por $x<0$, vamos obter:

$$-\frac{x}{2} \geq \frac{\cos x - 1}{x} \geq -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4}, \quad \text{i.e.,}$$

$$-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4} \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq -\frac{x}{2}$$

Tomando o limite com $x \to 0^-$, vem:

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4} = 0 = \lim_{x \to 0^-} -\frac{x}{2}$$; e então,

pelo T-do Sandwiche segue que

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x} = 0} \quad \text{(III)}$$

De (II) e (III) segue que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$