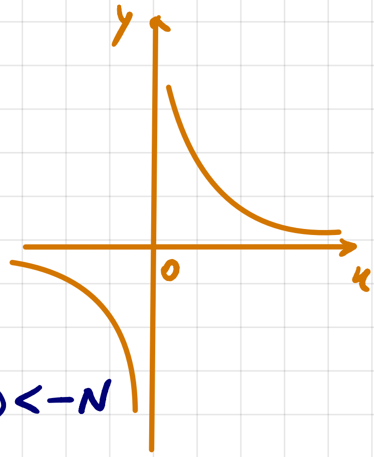
CÁLCULO I

16/12/24 – AULA 11

No final da aula passada estudamos limites infinitos. Vejamos um exemplo de cálculo.

Ex.: 01) Prove que $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.



Solução: Dado $N>0$ (grande), precisamos achar $\delta>0$ tal que, $\forall x : 0-\delta < x < 0$, implique em $f(x) < -N$.

Como devemos encontrar $\delta>0$ tal que $x > -\delta$, se tomarmos os inversos temos $\frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta}$, i.e.,

$$f(x) < -\frac{1}{\delta}.$$

Tome, então $N = \frac{1}{\delta} > 0$, pois neste caso, $\forall x : 0-\delta < x < \delta$, implica em

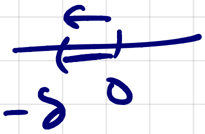
$$f(x) = \frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = -N$$

Isto prova que $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

02) Calcule $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$

[É o mesmo exemplo acima, porém não queremos uma prova, mas o seu cálculo]

Solução:



Tome $\delta > 0$ e considere $x = 0 - \delta = -\delta$

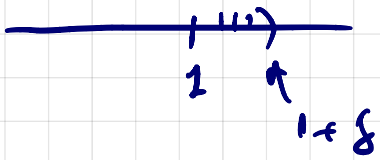
Disso, $x \to 0^- \Leftrightarrow \delta \to 0^+$ → Pois $\delta > 0$ logo $\delta \to 0$ por valores positivos.

Assim:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{-\delta} = -\underbrace{\frac{1}{0^+}}_{+\infty} = -\infty.$$

---

03) Calcule $\lim_{x \to 1^+} \frac{2x+1}{x-1}$.



Tome $\delta > 0$ e escreva

$$\boxed{x = 1 + \delta}$$

Logo, $x \to 1^+ \Leftrightarrow \delta \to 0^+$

Assim, escreveremos:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{2.(1+\delta)+1}{\cancel{1}+\delta-\cancel{1}} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0^+} \frac{2+2\delta+1}{\delta} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{3+\overbrace{2\delta}^{0}}{\underbrace{\delta}_{\to 0^+}} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

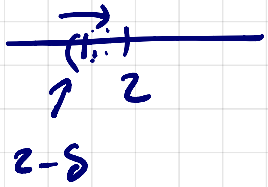
04) Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, indicando domínio, imagem (use limites laterais, infinitos e no infinito para efetuar o esboço)

SOLUÇÃO: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$

$$x \neq 2 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

NESTE CASO, DIZEMOS QUE A RETA VERTICAL $x=2$ É UMA ASSÍNTOTA VERTICAL (onde o gráfico de f chega muito próximo, sem atingir esta reta)

• $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x+1}{x-2}$



Tome $\delta > 0$ e escreva

$$x = 2 - \delta.$$

Daí, $x \to 2^- \Leftrightarrow \delta \to 0^+$

Assim:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{2.(2-\delta)+1}{\cancel{2} - \delta - \cancel{2}} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\overbrace{5-2\delta}^{0^+}}{\underbrace{-\delta}_{0^+}} = -\frac{5}{0^+} = -\infty$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x+1}{x-2}$

$2 \quad 2+\delta$. Tome $\delta>0$ e escreva

$x = 2+\delta$

Então,

$x \to 2^+ \iff \delta \to 0^+$

Disso, teremos:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{2.(2+\delta)+1}{\cancel{2}+\delta-\cancel{2}}$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+} \frac{5+\overbrace{2\delta}^{\to 0^+}}{\underbrace{\delta}_{\to 0^+}} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

Por fim, analisamos também os limites no infinito, ou seja:

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} 2 = 2$$

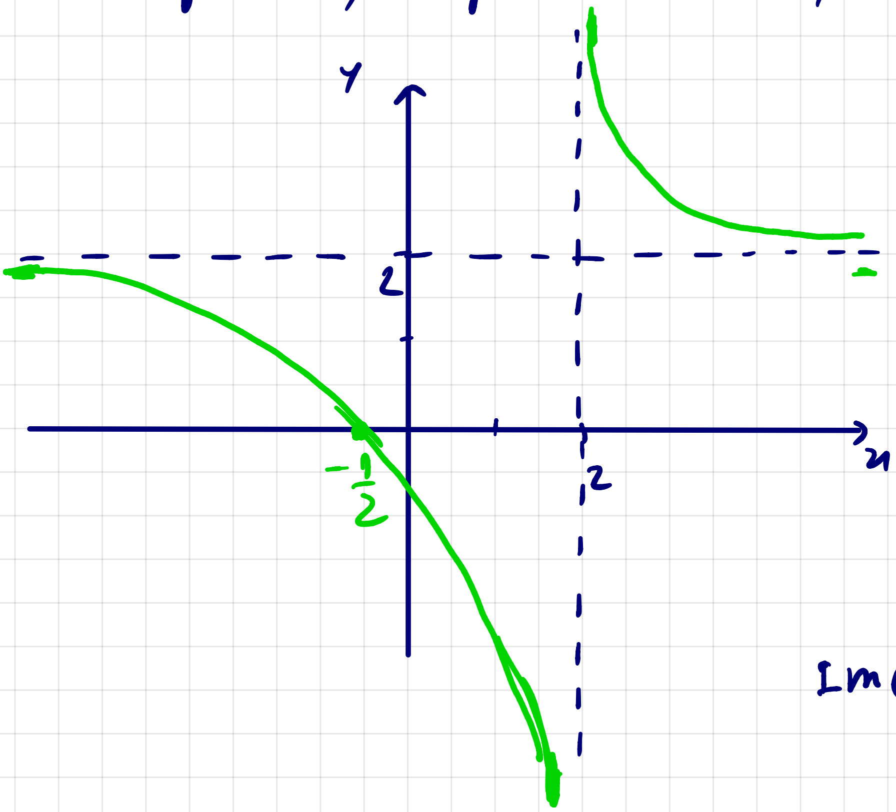
$\Longrightarrow$ $f(x) = 2$ É UMA ASSÍNTOTA HORIZONTAL.

- zeros de f: onde $f(x)=0$.

$$f(x)=0 \iff \frac{2x+1}{x-2}=0 \iff 2x+1=0$$

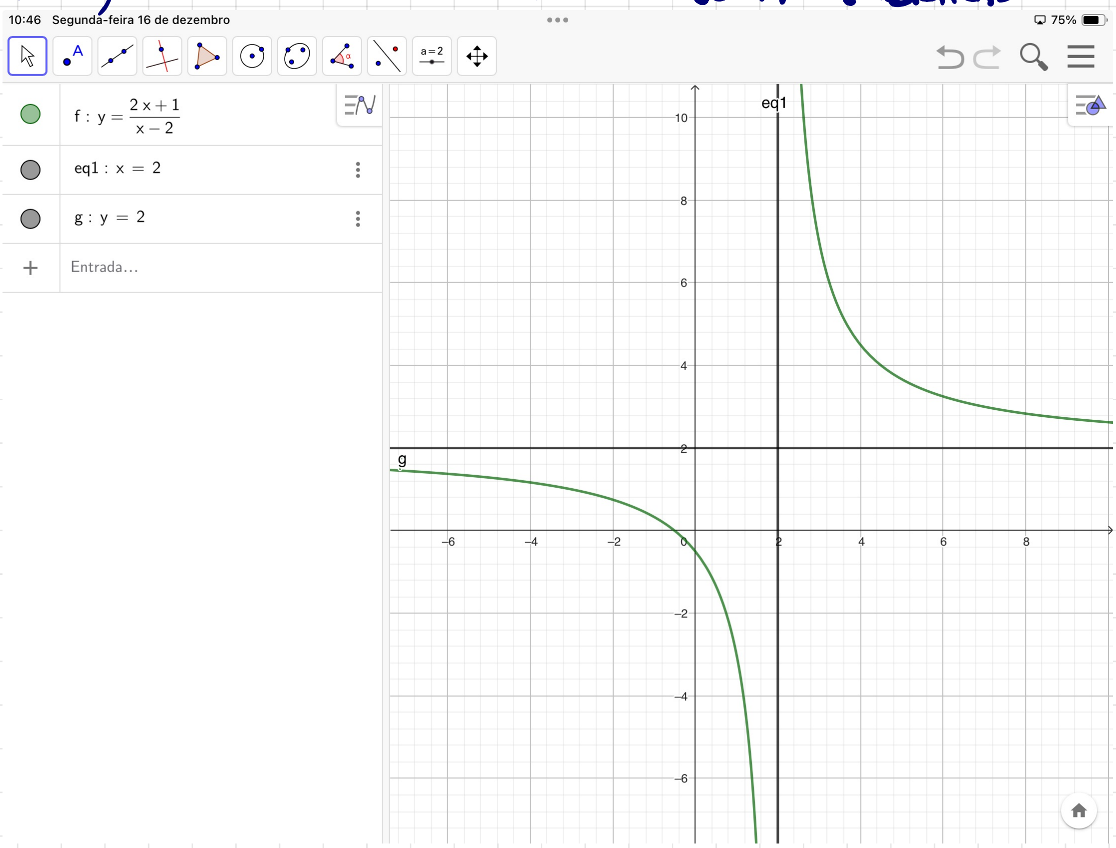
$$\iff x = -\frac{1}{2}$$

Com estas informações podemos esboçar o gráfico de f:



$Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

PELO GEOGEBRA, COM SUAS ASSÍNTOTAS HORIZONTAL E VERTICAL.



LIMITES NOTÁVEIS:

TEOREMA (PRIMEIRO LIMITE NOTÁVEL OU LIMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL)

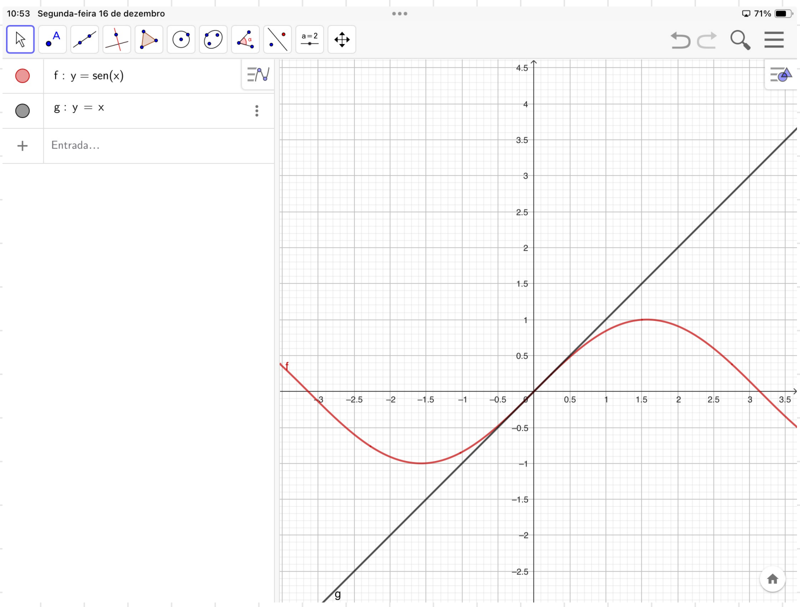
Vale o seguinte limite:

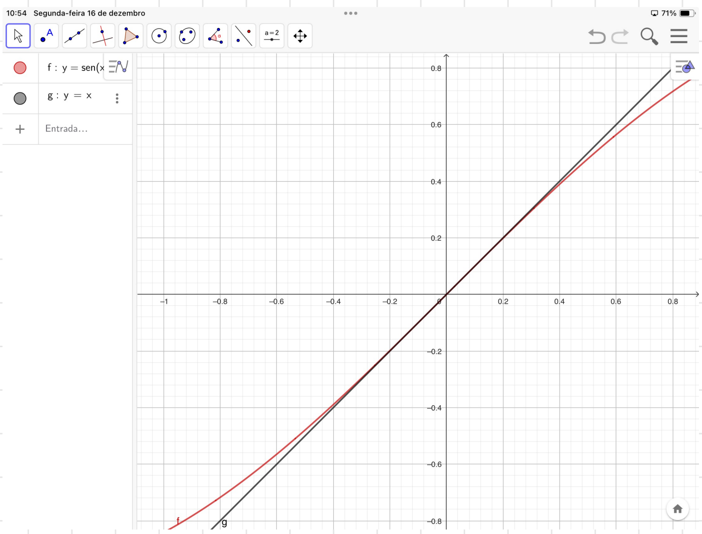
$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}=1.$$

observações:

(i) este resultado vale se tivermos o limite do seno de um arco sobre o mesmo arco, e a variável do limite produz o símbolo $\frac{0}{0}$.

(ii) este resultado nos diz que, muito próximo de $x=0$, os gráficos de $f(x)=\text{sen}\,x$ e $g(x)=x$ são "quase" os mesmos.





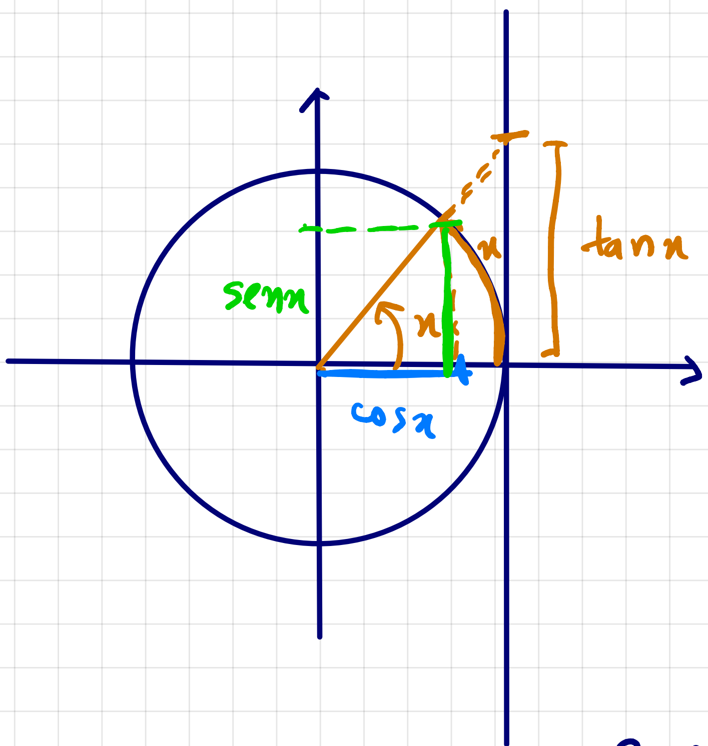
DEMONSTRAÇÃO: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = ?$

Vamos examinar $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

1º: $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$: Tome $x > 0$ tal que

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad (1^{\circ} q)$$

Considere o esquema no ciclo trigonométrico.



Pelo esquema acima, concluímos que

$$\operatorname{sen} x < x < \tan x .$$

Dividindo por $\operatorname{sen} x > 0$, (pois $0 < x < \frac{\pi}{2}$),

obtemos:

$$\frac{\cancel{\operatorname{sen}} x}{\cancel{\operatorname{sen}} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$$

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cancel{\operatorname{sen} x}}$$

Tomando os inversos, vem:

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Tomando o limite com $x \to 0^+$, temos:

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^+} \cos x}_{\cos 0 = 1} < \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \underbrace{\lim_{x \to 0^+} 1}_{= 1}$$

$\Downarrow$ T. do sanduíche

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

Analogamente se mostra que $\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Portanto, o resultado segue.

$\square$

Vejamos alguns exemplos de aplicação:

01) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} 3 \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} 3x}{3 \cdot x}}_{1} = 3 \cdot 1 = 3$$

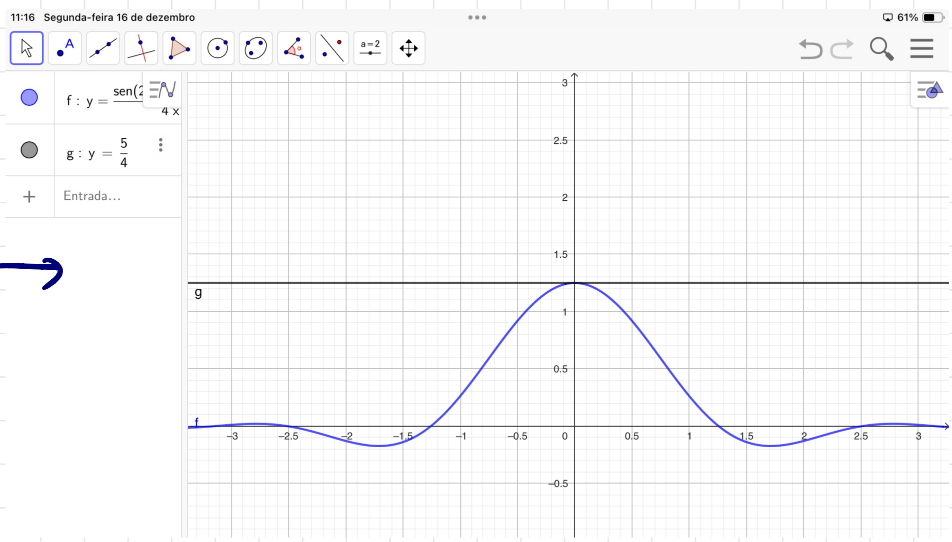
02) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}{4x} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{4x} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{4x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{4x} + \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{4x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} 2x}{2 \cdot (2x)}}_{1} + \lim_{x \to 0} 3 \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} 3x}{4 \cdot 3x}}_{1} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

ESBOÇO GRÁFICO PELO GEOGEBRA, INCLUINDO A RETA $y = \frac{5}{4}$, PARA MOSTRAR QUE PERTO DE $x = 0$, $f(x)$ SE APROXIMA DESTE VALOR. →



03) $$\lim_{x\to 0} \frac{x+\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}4x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x+\operatorname{sen}3x}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}4x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\dfrac{x}{x}}^{\,1} + \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}3x}{3.x}}_{\to 1}.3}{2\underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}2x}{2.x}}_{\to 1} - 4\underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}4x}{4.x}}_{\to 1}} = \frac{1+3}{2-4} = -2$$

04) $$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{(x-1).(x+1)} . (x+1)$$

$$= \lim_{x\to 1} (x+1). \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{(x^2-1)}}_{\to 1} = (1+1).1 = 2$$

05) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

NOTE QUE: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$

$\operatorname{sen}^2 x = (1+\cos x)(1-\cos x)$

$\Rightarrow 1-\cos x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}$

Disso, teremos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x} \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= (1)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos 0} = 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

ob) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\operatorname{sen} 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\operatorname{sen} 2x} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2}{\operatorname{sen} 2x \cdot (\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{(\sqrt{x+1}+1)\cdot \operatorname{sen} 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot x}{2 \cdot (\sqrt{x+1}+1) \cdot \operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(\sqrt{x+1}+1)} \cdot \frac{2x}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(\sqrt{x+1}+1)} \cdot \left(\underbrace{\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}_{1}\right)^{-1} = \frac{1}{2\cdot(1+1)} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$