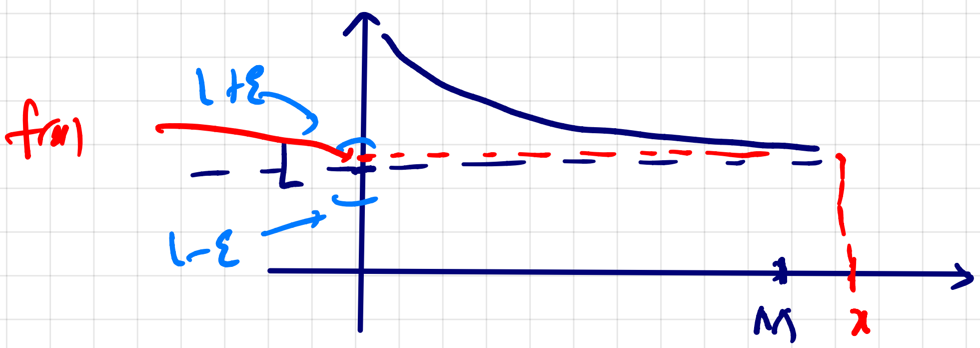
CÁLCULO I

$\boxed{11/12/24 \text{ - AULA } 10}$

LIMITES NO INFINITO.

Def: Seja $f: (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tal que, } \forall x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Ex: Mostra que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Solução: Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos encontrar $M > 0$, tal que, $|f(x) - 0| < \varepsilon$, sempre que $x > M$.

Analisando $|f(x) - 0|$:

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2}$$

Como queremos $x > M$, então $x^2 > M^2$, tomando os inversos, teremos $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{M^2} := \varepsilon$

Assim, se M for tal que $\frac{1}{M^2} = \varepsilon$, então

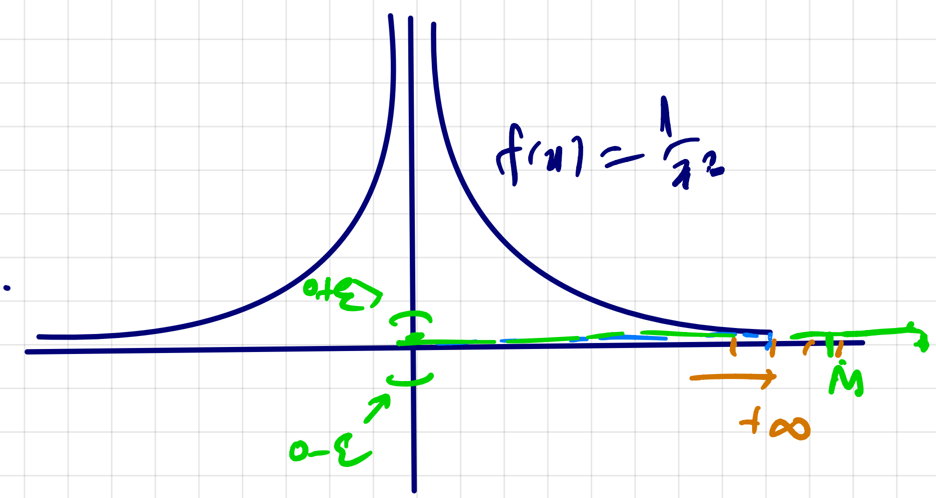
$$M^2 = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow M = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$$

Logo: $\forall x > M$, temos

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} < \frac{1}{M^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} =$$

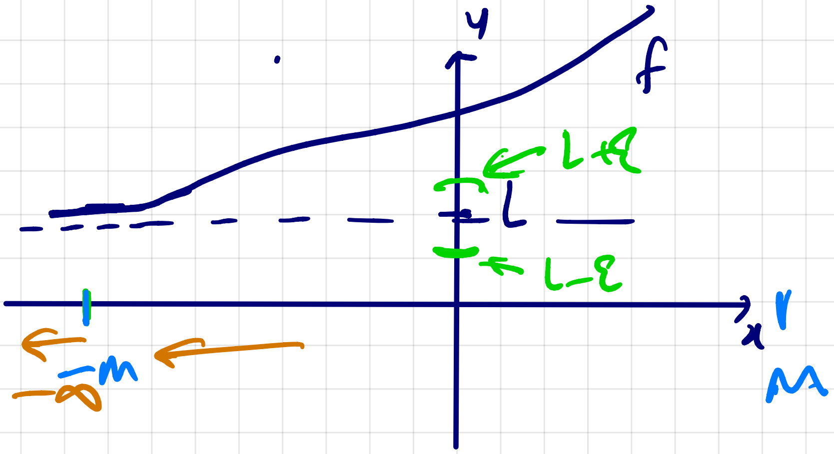
$$\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.



Def.: Dada $f: (-\infty, +a) \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, M > 0 \text{ tal que, } \forall x:\ x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Quando estes limites envolvem polinômios, obtemos novos símbolos de indeterminação.

Por exemplo; $f(x) = x^2 - x$., o que seria $\lim_{x \to +\infty} f(x)$? Se substituirmos, teremos:

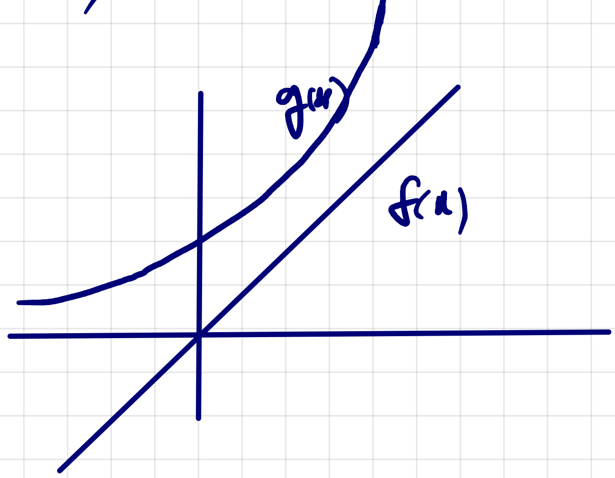
$$(+\infty)^2 - \infty = \boxed{+\infty - \infty},$$

que é um SÍMBOLO DE INDETERMINAÇÃO, pois não sabemos a magnitude de cada um dos símbolos de infinito, a priori.

Do mesmo modo, tem-se outros símbolos de indeterminação envolvendo o infinito:

$$\frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad 0 \cdot \infty$$

Por exemplo, se temos $f(x) = x$ e $g(x) = e^x$.



- $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$

POIS O DENOMINADOR VAI AO INFINITO MAIS RÁPIDO QUE O NUMERADOR

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$

POIS O NUMERADOR e^x VAI AO INFINITO MAIS RÁPIDO DO QUE O DENOMINADOR x.

Porém, estas avaliações são heurísticas (i.e.: informais). Precisamos de um procedimento mais preciso para o cálculo.

Ex: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{4x-5x^2} = ?$

No caso para funções racionais (como o exemplo dado), o procedimento é simples: ponha em evidência o termo de mais alto grau do numerador e do denominador. Efetue, em seguida, simplificações, e faça a passagem ao limite. Vejamos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+1}{4x-5x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}^{\,1}\cdot\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{-5\cancel{x^2}\left(-\frac{4}{5x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1\cdot\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{-5\cdot\left(-\frac{4}{5x}+1\right)} =$$

$$= \frac{1\cdot\left(1-\underbrace{\frac{3}{+\infty}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{(+\infty)^2}}_{\to 0}\right)}{-5\cdot\left(\underbrace{-\frac{4}{5\cdot(+\infty)}}_{\to 0}+1\right)} = \frac{1\cdot 1}{-5\cdot 1} = -\frac{1}{5}$$

Obs.: Note que $\frac{1}{x^n} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$

Ou seja, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

De fato, mais acima já mostramos um caso particular que $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Vamos mostrar que:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0. \qquad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \text{ fixo.}$$

Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $M > 0$ tal que, $\forall x < -M$, implique em $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

Avaliando $|f(x) - 0|$:

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| = \frac{1}{|x|^n} = \frac{1}{(-x)^n}$$

pois $x \to -\infty$, ou seja $x < 0$ e grande em módulo

Como queremos $x < -M \Rightarrow -x > M$

Elevando à potência $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$(-x)^n > M^n .$$

Tomando os inversos; vem:

$$\frac{1}{(-x)^n} < \frac{1}{M^n} := \varepsilon \qquad (*)$$

$$\Rightarrow M^n = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow M = \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} .$$

Ou seja, basta tomar $M = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} > 0$.

Assim, se $x < -M$, segue que

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{(-x)^n} < \frac{1}{M^n} = \varepsilon ,$$

por (*)

provando que $\frac{1}{x^n} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

Voltando ao problema dado, podemos simplificar sua resolução tomando simplesmente os maior grau do numerador e do denominador:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+1}{4x-5x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}}{-5\cancel{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$$

termos de mais alto grau do num. e do denominador.

Vejamos outros exemplos:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-5x^3+3}{4x^2+x^3-x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cancel{x^4}}{-x^{\cancel{5}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{x} = -\frac{3}{(+\infty)} = 0 .$$

obs.:

$$\frac{1}{10} = 0,1 \qquad \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$\frac{1}{100} = 0,01 \qquad \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

(b) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 5x^3 + 2}{x^2 - x^5 + x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5\cancel{x^3}}{-x^{\cancel{5}\,2}} =$$

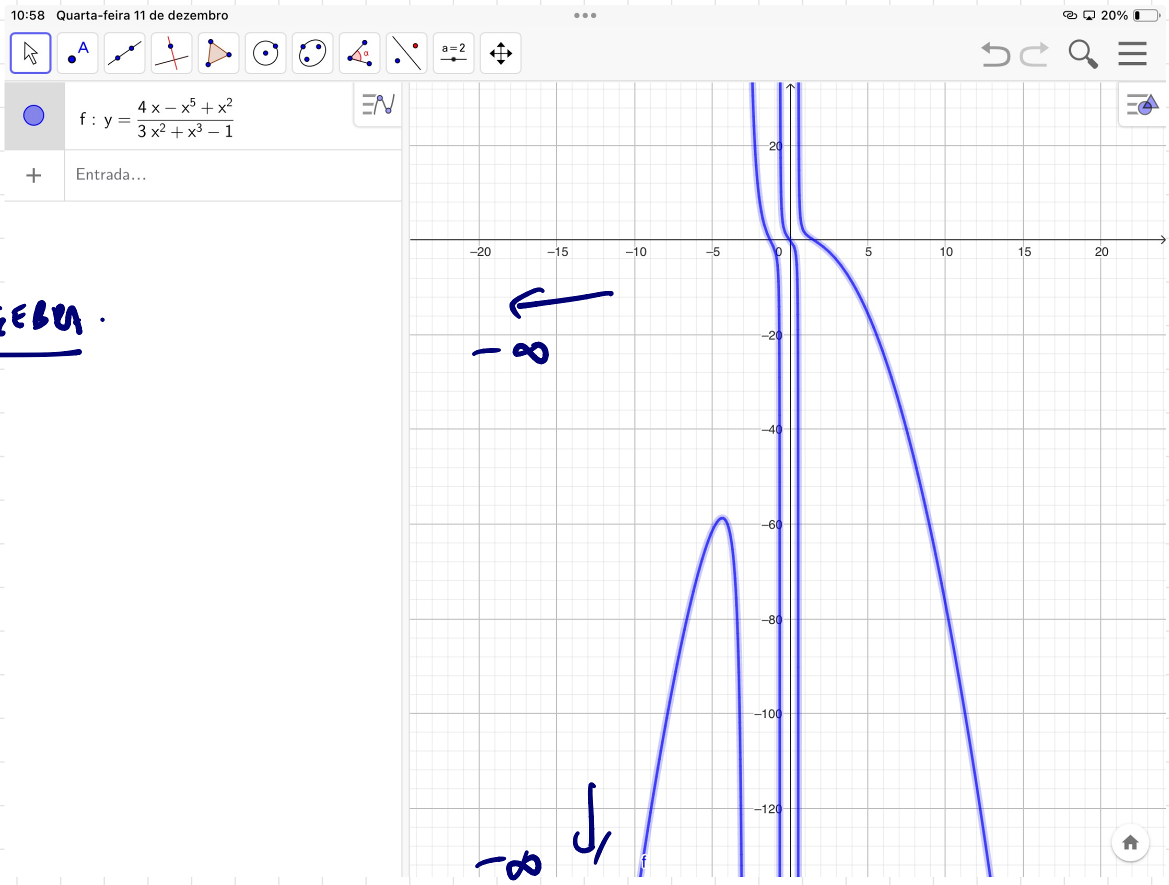
$$= \lim_{x \to -\infty} +\frac{5}{x^2} = \frac{5}{(-\infty)^2} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

(c) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x - x^5 + x^2}{3x^2 + x^3 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^{\cancel{5}\,2}}{\cancel{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -x^2 = -(-\infty)^2 = -(+\infty) =$$

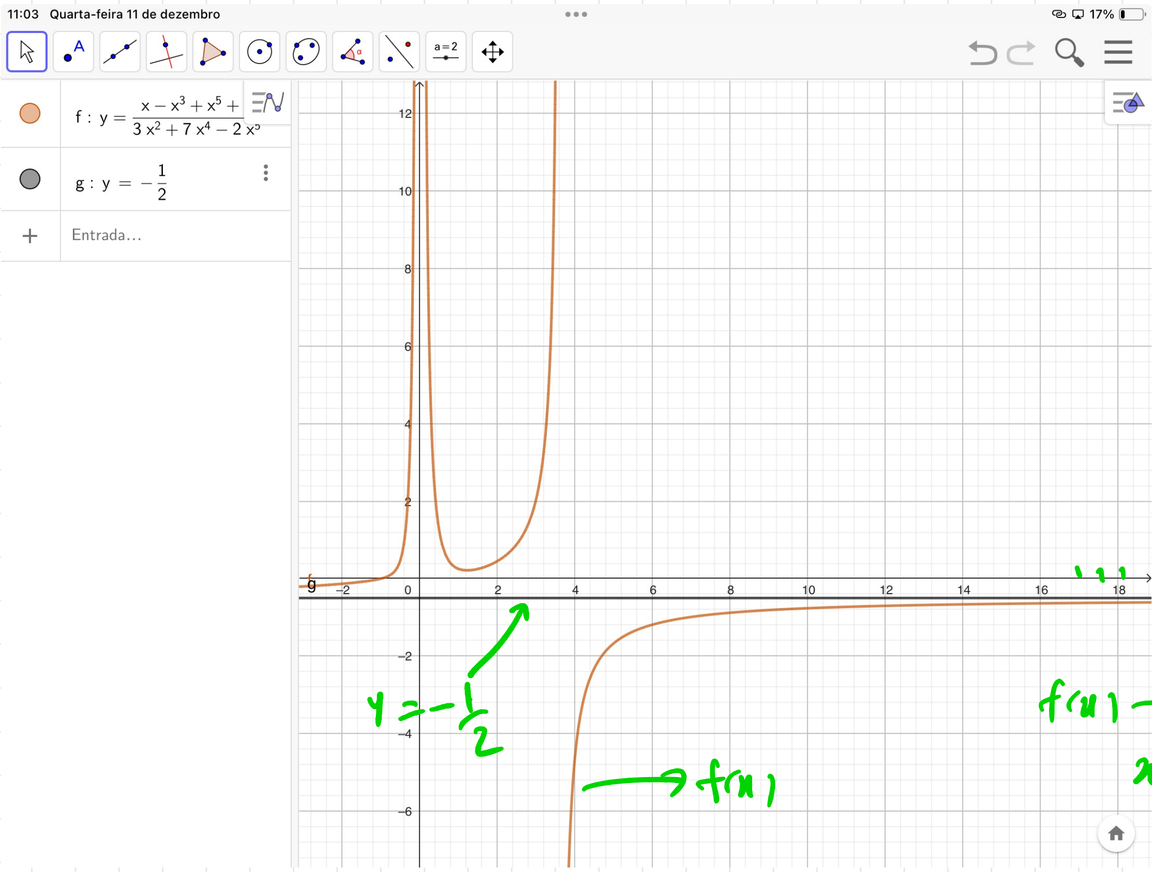
$$= -\infty$$

PELO GEOGEBRA.



(d) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x - x^3 + x^5 + 1}{3x^2 + 7x^4 - 2x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^5}}{-2\cancel{x^5}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$



$y = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow f(x)$

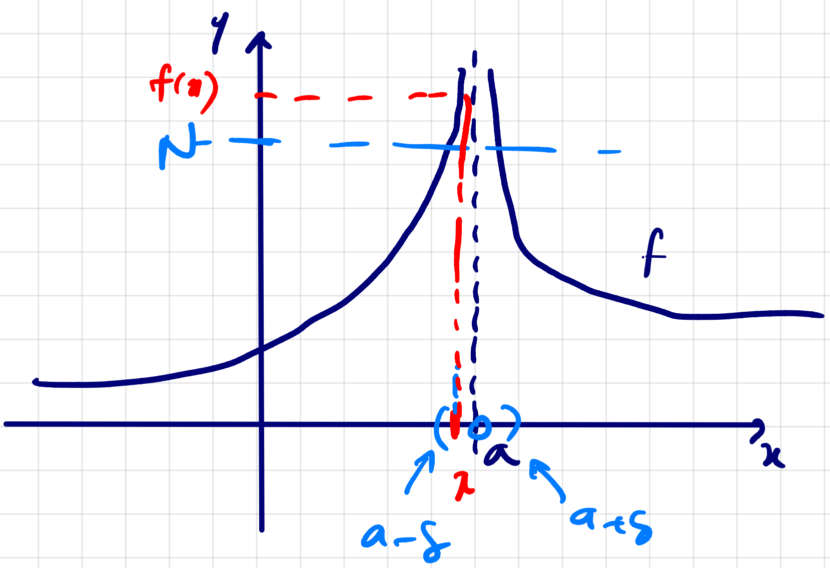
$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{1}{2}.$

LIMITES INFINITOS:

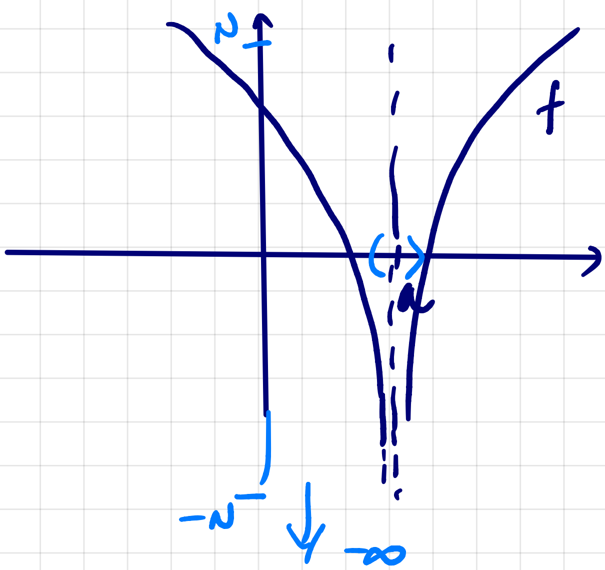
São limites cujo resultado é $\pm\infty$.

Def.: Temos as definições:

01) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \overset{def.}{\iff} \forall N > 0, \exists \delta > 0$ tal que,
$\forall x: 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > N$

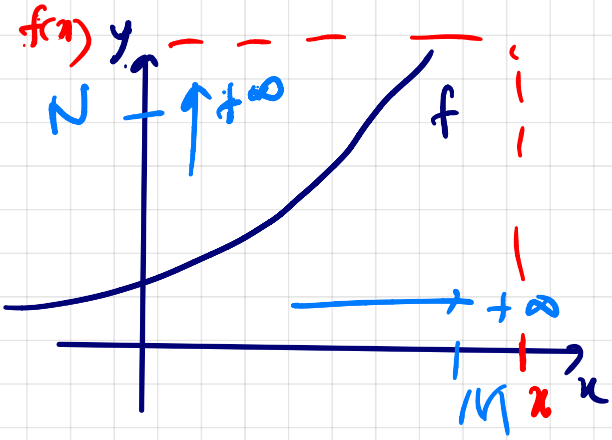


02) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \overset{def.}{\iff} \forall N > 0, \exists \delta > 0$ tal que
$\forall x: 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) < -N$



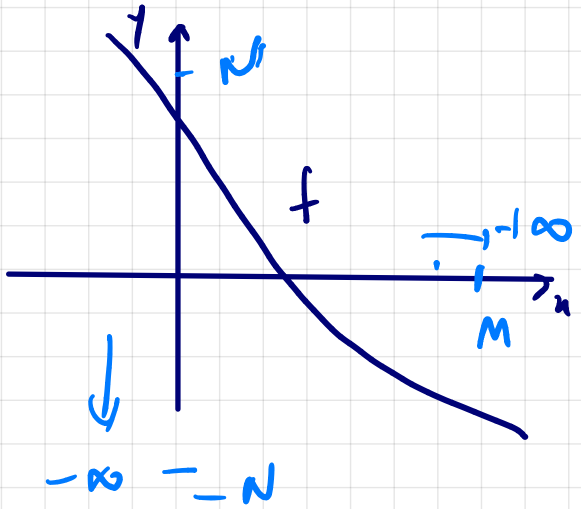
03) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall N>0,\ \exists M>0$ tel que,

$\forall x > M \Rightarrow f(x) > N.$



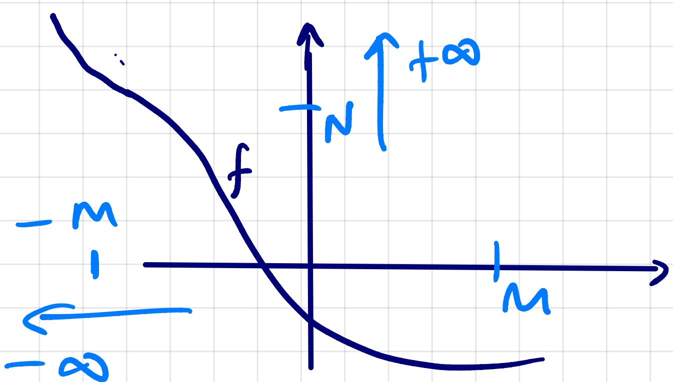
04) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \overset{\text{def.}}{\iff} \forall N>0,\ \exists M>0$ tel que,

$\forall x > M \Rightarrow f(x) < -N.$



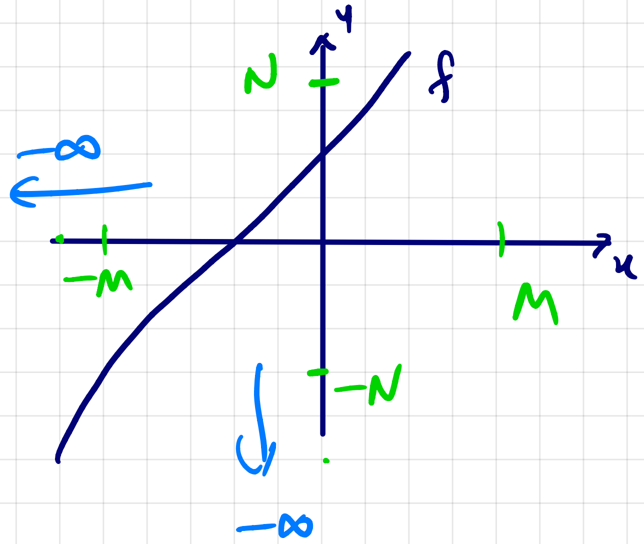
05) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \overset{\text{def.}}{\iff} \forall N>0,\ \exists M>0$ tel que

$\forall x < -M \Rightarrow f(x) > N.$



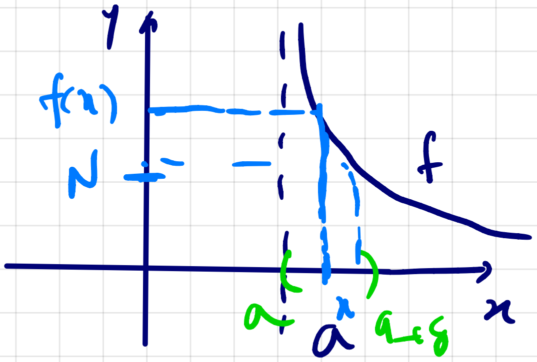
06) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \overset{def.}{\iff} \forall N > 0, \exists M > 0$ tal que,

$\forall x < -M \implies f(x) < -N.$



07) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \overset{def}{\iff} \forall N > 0, \exists \delta > 0,$ tal que,

$\forall x : a < x < a + \delta \implies f(x) > N.$



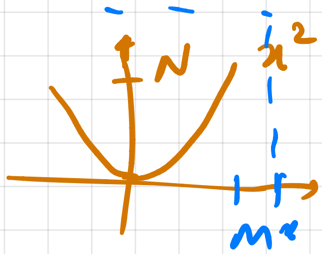
08) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ (exercício)

09) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ (exercício)

10) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (exercício)

EXEMPLO:

01) Mostre que $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.



SOLUÇÃO: Dado $N > 0$, precisamos achar $M > 0$ tal que, $\forall x > M \implies f(x) > N$.

De $x > M$, elevando ao quadrado vamos obter $x^2 > M^2$, i.e., $f(x) > M^2 := N$

Ou seja basta tomar $M = \sqrt{N}$.

Isso prova que $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

$\square$

[POR EXEMPLO, PARA $N = 100$, DEVEMOS TOMAR $M = \sqrt{100} = 10$.
ASSIM, $\forall x > 10$, É GARANTIDO QUE $f(x) > 100 = N$.
EX: $x = 11 \implies f(x) = (11)^2 = 121 > N = 100$.]

ENTREGAR NA QUARTA, DIA 18/12: além as definições 08, 09 e 10 e provar também que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$