CÁLCULO I

18/12/24 – AULA 12

Na aula passada provamos o seguinte limite fundamental:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Vejamos outro exemplo:

$$\frac{1-\cos 0}{0 \cdot \operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} \quad (\text{INDET.})$$

07) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x \cdot \operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = (1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)$$

$$\hookrightarrow \quad 1-\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Disso, obtemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{1+\cos 2x}}{x\cdot \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{1+\cos 2x} \cdot \frac{1}{x\cdot \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot 2 \cdot 2x}{(1+\cos 2x)\, 2x \cdot \operatorname{sen} x \cdot 2x} = \frac{2\cdot 2}{(1+\cos 0)} = 2$$

$\to 1$ $\to 1$ $\to 1$

COROLÁRIO: Também valem os limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \, ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsen x}{x} = 1 \quad \text{e}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$

DEMONSTR.:

1º: $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

1

2º: $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsen x}{x} = 1:$$

Escreva $w = \arcsen x$. Então, $x = \operatorname{sen} w$

Assim, $\underset{x\to 0}{w \longrightarrow 0}$, e daí, efetuando a mudança de variável, vamos obter:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsen x}{x} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\operatorname{sen} w} =$$

$$= \lim_{w\to 0} \Big(\underbrace{\frac{\operatorname{sen} w}{w}}_{\to 1}\Big)^{-1} = (1)^{-1} = 1.$$

Analogamente se mostra que $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$

□

Ex.: Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{x + \arcsen 2x}{\tan 3x + x}$ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \arcsen 2x}{\tan 3x + x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x+\arcsen 2x}{x}}{\frac{\tan 3x + x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\frac{x}{x}}^{1} + 2\cdot\frac{\arcsen 2x}{2x}}{3\cdot\frac{\tan 3x}{3x} + \cancel{\frac{x}{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2\overbrace{\frac{\arcsen 2x}{2x}}^{\to 1}}{3\cdot\underbrace{\frac{\tan 3x}{3x}}_{\to 1} + 1}$$

$$= \frac{1+2}{3+1} = \frac{3}{4}$$

LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL ou SEGUNDO LIMITE NOTÁVEL.

Considere a função $f: \mathbb{R} \setminus (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x .$$

Vamos explorar o comportamento das imagens desta função quando x for "muito grande" (em módulo); ou seja, quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

x	$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	$(1+1)^1 = 2$
10	$(1+0{,}1)^{10} = (1{,}1)^{10} \cong 2{,}59374246\ldots$
100	$(1+0{,}01)^{100} = (1{,}01)^{100} \cong 2{,}704813829\ldots$
1000	$(1+0{,}001)^{1000} = (1{,}001)^{1000} \cong 2{,}71692393\ldots$
10.000	$(1{,}0001)^{10.000} \cong 2{,}7181459268\ldots$
100.000	$(1{,}00001)^{100.000} \cong 2{,}7182682371\ldots$
$\vdots$	$\vdots$
$+\infty$	$\downarrow$

$$e \cong 2{,}718281828\,4590,$$

onde e é o NÚMERO DE EULER, um número irracional.

Isto nos sugere o seguinte resultado:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e},$$

chamado de SEGUNDO LIMITE NOTÁVEL, ou LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL.

Analogamente se mostra que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Quando usamos este limite?

Quando num cálculo de limite encontramos o símbolo 1^∞, que é indeterminação, que significa "QUASE 1 ELEVADO AO INFINITO", o que vai indicar o uso do segundo limite notável.

No que segue apresentamos exemplos de aplicações.

01) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = ?$

SOLUÇÃO: Observe, inicialmente a base e o expoente:

BASE: $1+\frac{2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

EXPOENTE: $3x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$\Big\rangle\ 1^{+\infty}$ (INDETERM. QUE INDICA O USO DO 2º LIMITE NOTÁVEL.

Para removermos a indeterminação precisamos escrever $\left(1+\text{expressão}\right)^{\frac{1}{\text{expressão}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} e$

Vejamos:

$$\Big[\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\text{expressão}}\Big)^{\frac{x}{2}}\Big]^{\frac{2}{x}\cdot 3x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x}} = e^{6}$$

$\to e$

02) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{x^2-x}{3-2x}}$

INDETERMINAÇÃO QUE INDICA O USO DO 2º LIM. NOT.

• BASE: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$

• EXPOENTE: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{3-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{-2\cancel{x}} = -\infty$

$\Big\rangle\ 1^{-\infty}$

$$\left(1+\text{exp}\right)^{\frac{1}{\text{exp}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} e$$

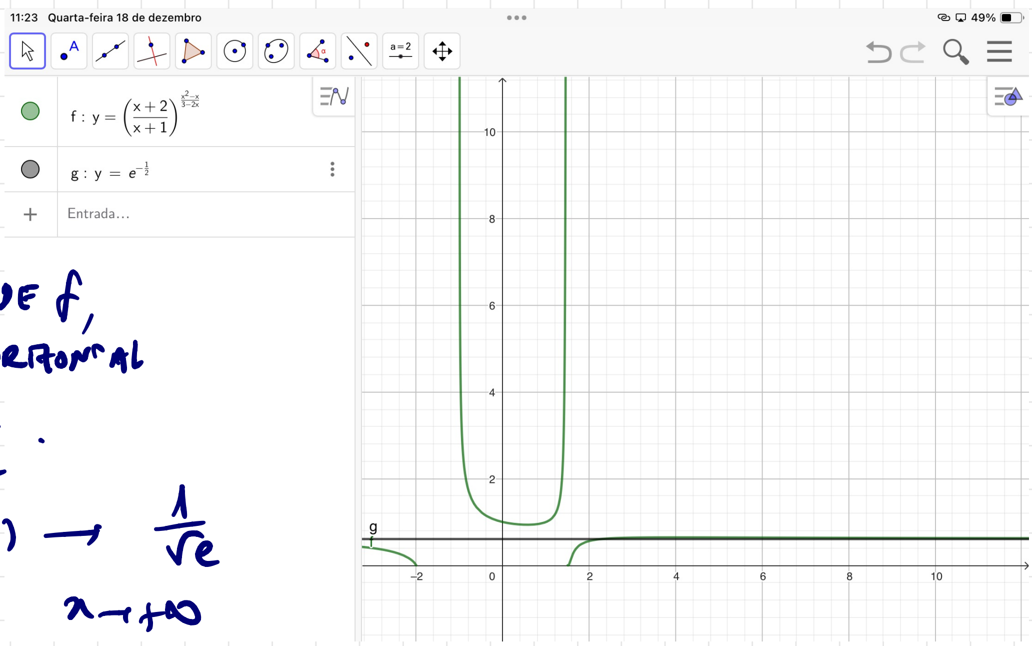
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{x^2-x}{3-2x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\underbrace{\frac{x+2}{x+1}-1}_{\text{exp.}}\right)^{\frac{x^2-x}{3-2x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}-1}{x+1}\right)^{\frac{x^2-x}{3-2x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{x^2-x}{3-2x}} = \left[\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{1}}}_{\to e}\right]^{\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x^2-x}{3-2x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{(x+1)\cdot(3-2x)}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{-2\cancel{x^2}}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

ESBOÇO GRÁFICO PELO GEOGEBRA, ONDE O GRÁFICO VERDE É O DE f, E A LINHA ESCURA HORIZONTAL É A RETA $y=\frac{1}{\sqrt{e}}$.



NOTAMOS QUE $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{e}}$

03) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+1}{x^2+x-4}\right)^{\frac{x-x^3}{x^2+1}}$

• BASE: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+1}{x^2+x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$

EXPOENTES: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=-\infty$

$\Big\rangle\ \underline{\underline{1^{-\infty}}}$

Assim, teremos: $\left(1+\text{expr.}\right)^{\frac{1}{\text{expr.}}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+1}{x^2+x-4}\right)^{\frac{x-x^3}{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2-3x+1}{x^2+x-4}-1\right)^{\frac{x-x^3}{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cancel{x^2}-3x+1-\cancel{x^2}-x+4}{x^2+x-4}\right)^{\frac{x-x^3}{x^2+1}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\underbrace{\frac{5-4x}{x^2+x-4}}_{\text{expr.}}\right)^{\frac{x^2+x-4}{5-4x}}\right]^{\frac{5-4x}{x^2+x-4}\cdot\frac{x-x^3}{x^2+1}}=$$

$\to e$

$$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{+4x^{\cancel{4}}}{\cancel{x^4}}}=\underline{\underline{e^4}}$$

COROLÁRIO: $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. 1^{∞}

DEMONSTR.: Escreva $w = \frac{1}{x}$. Então, $w \to \infty$ quando $x \to 0$. Dessa, teremos,

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{w\to\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w} = e$$

$\square$

EXEMPLO:

LISTA 04 02-W: $\lim_{x\to 0} (1+2\operatorname{sen} x)^{\cot x+4} = 1^{\infty}$

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to 0} (1+2\operatorname{sen} x)^{\cot x+4} = \left[\underbrace{\lim_{x\to 0} (1+2\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2\operatorname{sen} x}}}_{e}\right]^{2\operatorname{sen} x.(\cot x+4)}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \underbrace{2\operatorname{sen} x(\cot x+4)}_{0.\infty}} =$$

(INDET.)

$$= e^{\lim_{x \to 0} 2\operatorname{sen}x \cdot \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} + 4 \right)} = $$

$$= e^{\lim_{x \to 0} 2\cancel{\operatorname{sen}x} \cdot \left(\frac{\cos x + 4\operatorname{sen}x}{\cancel{\operatorname{sen}x}} \right)} = e^{2 \cdot \left(\overbrace{\cos 0}^{1} + 4 \overbrace{\operatorname{sen}0}^{0} \right)}$$

$$= e^{2}.$$