ARITMÉTICA.

06/12/24 — AULA 05

Na aula passada introduzimos o conj. $\mathbb{N}$ dos números naturais a partir dos axiomas de Peano, e vimos algumas propriedades.

ADIÇÃO em $\mathbb{N}$ é a operação

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(x, y) \mapsto x + y,$$

e é tal que $a + b^+ = (a+b)^+$

Obs: $a^+ = a + 1 = 1 + a$. (ou seja, para obter o sucessor basta somar 1).

Ex.: $1 + 2 = 1 + 1^+ = (1+1)^+ = 2^+ = 3$

Algumas propriedades da adição:

01) ASSOCIATIVIDADE:

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos por indução sobre $c \in \mathbb{N}$.

(i) (BASE DA INDUÇÃO): $c = 1$.

$$\underbrace{(a+b)+1}_{\parallel} \overset{?}{=} \underbrace{a+(b+1)}_{\parallel}$$
$$(a+b)^+ = a + b^+$$

logo, vale a igualdade

(ii) HIPÓTESE DA INDUÇÃO: suponha que a igualdade seja válida para um certo $c=k$, ou seja, que vale que

$$(a+b)+k = a+(b+k) \qquad (*)$$

TESE DA INDUÇÃO: precisamos mostrar que vale para $k^+ = k+1$.. (para o sucessor de k); ou seja, precisamos mostrar que

$$(a+b)+k^+ = a+(b+k^+)$$

De fato:

$$(a+b)+k^+ = \big((a+b)+k\big)^+ =$$

Pois $\alpha + k^+ = (\alpha+k)^+$

HIPÓTESE DA INDUÇÃO $(*)$

$$= \big(a+(b+k)\big)^+ = a+(b+k)^+ = a+(b+k^+)$$

Logo, vale o item (ii)

Pelos itens (i) e (ii) o resultado segue por indução matemática. $\square$

02) COMUTATIVIDADE: $a+b = b+a, \; \forall a,b \in \mathbb{N}$.

A prova é feita por indução sobre $b \in \mathbb{N}$.

(i) BASE DA INDUÇÃO: $b=1$:

Neste caso, teremos

$$\underbrace{a+1}_{= a^+} = \underbrace{1+a}_{= a^+}$$

(veja a observação na pág. 01)

Logo, vale a base da indução.

(ii) HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha a igualdade verdadeira para um certo $b=k$, ou seja, suponha que

$$a+k = k+a \qquad (*)$$

Precisamos mostrar que vale para $b=k^+$ (i.e., para o sucessor), ou seja, precisamos mostrar que

$$a+k^+ = k^+ + a. \qquad \text{(TESE DA INDUÇÃO)}$$

De fato

$$a+k^+ = (a+k)^+ \underset{\text{por } (*)}{=} (k+a)^+ = (k+a)+1 =$$

$$\underset{\text{ASSOCIATIVIDADE}}{=} k+(a+1) = k+(1+a) \overset{\text{ASSOCIATIVIDADE}}{=} (k+1)+a =$$

$$= k^+ + a.$$

Logo vale (ii).

Pelos itens (i) e (ii) o resultado segue por indução.

$\square$

03) LEI DO CANCELAMENTO: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c.$$

DEMONSTR.: A prova é feita por indução sobre $a \in \mathbb{N}$.

(i) BASE DA INDUÇÃO: $a = 1$.

$$1 + b = 1 + c \Rightarrow b^+ = c^+ \Rightarrow b = c.$$

AXIOMA (P4) DE PEANO

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha a propriedade verdadeira para um certo $a = k$, ou seja, que vale que

$$k + b = k + c \Rightarrow b = c.$$

(HIPÓTESE DA INDUÇÃO)

Precisamos mostrar que vale para $a = k^+$, ou seja, mostrar que

$$k^+ + b = k^+ + c \implies b = c.$$

(TESE DA INDUÇÃO)

De fato; por um lado, temos:

$$k^+ + b \underset{\text{COMUT.}}{=} b + k^+ = (b+k)^+ \underset{\text{COMUT.}}{=} (k+b)^+ =$$

$$\underset{\substack{\text{HIPÓTESE}\\ \text{DA IND.}}}{=} (k+c)^+ \underset{\text{COMUT.}}{=} (c+k)^+ = c + k^+ \underset{\text{COMUT.}}{=} k^+ + c$$

$$\implies k^+ + b = k^+ + c.$$

Além disso:

$$b + k^+ = c + k^+ \implies (b+k)^+ = (c+k)^+$$

$$\underset{\substack{\text{pelo AXIOMA}\\ \text{(P4) de Peano}}}{\implies} b + k = c + k \underset{\substack{\text{pela}\\ \text{hipótese}\\ \text{da indução}}}{\implies} b = c.$$

Logo, vale (ii)

Pelos itens (i) e (ii) o resultado segue por indução.

$\square$

Outras propriedades aditivas deixaremos como exercício (em lista)

MULTIPLICAÇÃO em $\mathbb{N}$:

Definimos o produto $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(x, y) \mapsto x \cdot y$,

e é tal que $\begin{cases} a \cdot b^+ = a \cdot b + a \\ a \cdot 1 := a \end{cases}$

EX.: $2 \cdot 3 = 2 \cdot 2^+ = 2 \cdot 2 + 2$

$= \underline{2 \cdot 1^+} + 2 = \underline{2 \cdot 1 + 2} + 2$

$= 2 + 2 + 2 = 6$

obs.: $b^+ \cdot a := ba + a$

Propriedades multiplicativas:

01) COMUTATIVIDADE: $a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$.

Provaremos por indução sobre $a \in \mathbb{N}$.

(i) BASE DA INDUÇÃO: $a = 1$:

$1 \cdot b = b = b \cdot 1$. OK!

Logo, vale a base da indução.

(ii) HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha a igualdade válida para um certo $a = k$, ou seja, que:

$$k \cdot b = b \cdot k \qquad (*)$$

Precisamos provar a tese da indução, ou seja, mostrar que

$$k^+ \cdot b = b \cdot k^+$$

De fato, basta notar que

$$b \cdot k^+ = bk + b \underset{\text{por } (*)}{=} kb + b = k^+ \cdot b$$

Logo, vale (ii)

Por (i) e (ii) segue o resultado por indução.

$\square$

02) DISTRIBUTIVIDADE: $a.(b+c) = ab + ac$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

Provaremos por indução sobre $a \in \mathbb{N}$.

(i) BASE DA INDUÇÃO: $a = 1$:

$$1.(b+c) = b+c = 1.b + 1.c \quad \text{ok!}$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha a igualdade verdadeira para um certo $a = k$, ou seja, que vale que

$$k.(b+c) = k.b + k.c \quad (*)$$

Precisamos mostrar que vale para $a = k^+$, ou seja mostrar a tese da indução:

$$k^+.(b+c) = k^+.b + k^+.c$$

De fato:

$$k^+.(b+c) \underset{\text{COMUTATIVIDADE DO PRODUTO}}{=} (b+c).k^+ = (b+c).k + (b+c) =$$

$$= k.(b+c) + (b+c) \underset{\text{por } (*)}{=} k.b + k.c + (b+c) =$$

$$= kb + (k.c + b) + c = k.b + (b + k.c) + c =$$

ASSOCIATIV. DA ADIÇÃO

COMUTATIV. DA ADIÇÃO

ASSOC. DA ADIÇÃO

$$= (k.b + b) + (k.c + c) = (b.k + b) + (c.k + c) =$$

COMUTAT. DO PRODUTO

$$= b.k^+ + c.k^+ = \underline{k^+.b + k^+.c}$$

COMUTATIV. DO PRODUTO

Logo, vale a tese da indução, provando (ii)

Por (i) e (ii), pela indução, segue a propriedade distributiva.

---

03) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

(ASSOCIATIVIDADE)

Provemos por indução sobre $c \in \mathbb{N}$.

(i) BASE DA INDUÇÃO: $c = 1$:

$$a\cdot(b\cdot 1) \overset{?}{=} (a\cdot b)\cdot 1$$

$$a\cdot b = ab \quad \text{(OK)!}$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha a igualdade válida para um certo $c = k$, ou seja, que vale que

$$a\cdot(b\cdot k) = (a\cdot b)\cdot k. \qquad (*)$$

Precisamos mostrar que vale para $c = k^+$, ou seja, mostrar que

$$a\cdot(b\cdot k^+) = (a\cdot b)\cdot k^+.$$

De fato:

$$(ab)\cdot k^+ = (ab)\cdot k + ab \underset{\text{por } (*)}{=} a\cdot(bk) + ab \underset{\text{DISTRIBUTIV.}}{=}$$

$$= a\,(\underbrace{bk+b}_{b\cdot k^{+}}) = a\cdot(b\cdot k^{+})\,,$$ ou

seja, chegamos na tese da indução.

Por fim, pelos itens (i) e (ii) segue o resultado por indução.

$\square$